微分流形基础

李养成　郭瑞芝　崔登兰　编著

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书分为 5 章，依次为：微分流形与可微映射，流形上的微分学，李群初步，流形上的积分，de Rham定理和Hodge定理. 本书取材精炼，努力将流形上的拓扑、几何与分析三个方面内容有机结合. 对于分析的内容，力求使读者领悟其几何实质；而对于几何的内容，则要求洞悉其分析精髓. 本书表达清晰，注意展现数学知识的发生过程和数学问题解决的思维过程；论述深入浅出，便于读者透过形式化的表述理解其内含的数学本质.

本书可作为数学、应用数学等专业研究生和高年级本科生的教材，也可供力学、物理学、数量经济学等相关专业人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

微分流形基础/李养成，郭瑞芝，崔登兰编著. —北京：科学出版社，2011

ISBN 978-7-03-031757-5

Ⅰ. 微… Ⅱ. ①李… ②郭… ③ 崔… Ⅲ. 微分流形-高等学校-教材 Ⅳ. O189.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 122755 号

责任编辑：王 静／责任校对：朱光兰
责任印制：张克忠／封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市安泰印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 7 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2011 年 7 月第一次印刷 印张：13 1/2
印数：1–3 000 字数：270 000

定价：35.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

微分流形是描述自然现象的一种空间形式, 已成为现代数学中富有代表性的基本概念. 它不仅是微分拓扑、现代微分几何及李群论的研究对象, 而且与众多的现代数学分支紧密相关. 微分流形的理论、方法及语言向诸多数学分支渗透, 为当代非线性分析的发展提供了理想的平台. 微分流形的理论与方法已被越来越多的数学工作者所掌握, 而且对从事力学、物理学 (特别是理论物理学) 以及数量经济学等研究的专业人员来说, 微分流形知识也是他们必备的数学工具.

在我国数学界, 加强几何学的教学已形成一种共识. 现在国内有许多高校为数学、应用数学等专业的研究生和高年级本科生开设了微分流形课程, 传授微分流形的基础知识. 鉴于目前国内在这方面的教材和参考书仍然很少, 为适应人才培养的需求, 我们撰写了这本《微分流形基础》.

本书的编写围绕选材及内容陈述有如下考虑.

首先, 编写教材既要重视基础又要面向未来, 反映数学科学发展的特点. 当今数学各个分支相互渗透, 已形成一些新的交叉学科与边缘学科, 数学科学朝着更高层次的综合方向发展. 著名数学家陈省身先生在 1982 年说过, "将来数学研究的对象, 必然是流形." "要研究整个流形, 流形论的基础便成为必要" (见文献 [1]). 即便如此, 内容也非常丰富, 因此必须挑选流形论中最重要的基本概念、基本理论和基本方法, 力求精炼典型, 努力将流形的拓扑、几何与分析三个方面的内容有机结合. 对于分析的内容, 力求使读者领悟其几何实质; 而对于几何的内容, 则要求洞悉其分析精髓. 在系统介绍流形论基础知识时, 务必反映出流形论与诸多数学分支之间的内在联系, 体现数学的统一性.

其次, 在内容呈现上, 应遵循以学生为本的原则, 注意展现数学知识的发生过程和数学问题解决的思维过程. 努力做到将形象思维与抽象思维相结合, 直觉与逻辑相结合, 以方便读者透过形式化的表述领会其内含的数学本质, 能够举一反三, 触类旁通.

本书从微分流形的基本概念讲起, 第 1, 2, 4 章组成流形上的微积分的基本理论, 是本书的基础材料. 李群是一类重要的微分流形, 它集几何、代数与分析于一身, 本书第 3 章介绍李群的基本知识, 从中可以看到几何的、代数的、分析的方法交替使用, 相辅相成. 而对于另一类重要的黎曼流形, 我们在第 5 章就可定向的紧致黎曼流形介绍了深刻的 Hodge 定理. 第 5 章中另一个深刻结果, 即 de Rham 同构定理, 我们采用 I.M.Singer, J.A.Thorpe 在文献 [2] 中所使用的初等方法给出了详

细证明, 而未使用层的上同调理论这样高深的数学工具. 比较而言, 似乎前者易被读者接受.

本书作为数学、应用数学等专业研究生及高年级本科生教材, 可供一个学期使用. 如果学时不足, 以下选择可供参考：选取第 1 章前 5 节、第 2 章、第 4 章, 然后在第 3, 5 章中再选取一章. 而对于第 1 章中的后 3 节, 着重介绍 Whitney 浸入定理的证明, 目的是让学生掌握它的思想方法. 至于 Sard 定理,Whitney 嵌入定理,Thom 横截性定理, 可以只陈述其意义, 给出证明思路而略去证明. 当然, 使用本书的学校可以根据具体情况由任课老师决定教学内容的取舍. 如果读者在分析与代数方面受过良好的本科训练, 并且熟悉点集拓扑的有关知识, 完全可以阅读本书.

本书编写工作由李养成主持. 参照由他整理的讲稿, 崔登兰撰写第 1 章和第 2 章, 郭瑞芝撰写第 3 章, 李养成撰写第 4 章和第 5 章并且负责全书的修改与定稿. 何伟博士精心绘制了书中所有图表, 在此表示感谢.

感谢国家自然科学基金项目 (编号：10971060) 为本书出版提供资助.

由于编者水平有限, 书中仍有许多不足之处, 甚至有一些错误, 恳请大家批评指正.

李养成

2011 年 3 月

目　录

第 1 章　微分流形与可微映射

流形是一类重要的拓扑空间, 它的一个显著特征是局部为欧氏空间. 为了把欧氏空间 (看作平直空间) 中的微积分引入到流形中去, 我们在 1.1 节对拓扑流形引进了微分结构. 1.3 节中介绍的微分流形在一点处的切向量是一个线性求导算子, 它是通常微积分学中方向导数的自然推广. 微分流形 M 在一点处的切空间可看作对弯曲空间 M 在该点处邻近的一个局部线性近似, 并且可微映射 $f: M \to N$ 在点 $p \in M$ 的微分 (或说切映射) 则是非线性映射 f 在点 p 附近的一个局部线性逼近. 用线性代替 (或逼近) 非线性是数学研究中的常用方法, 那么切映射 $(\mathrm{d}f)_p: T_pM \to T_{f(p)}N$ 怎样反映 f 在点 p 的邻域内的性态呢? 1.4 节中介绍的反函数定理和隐函数定理以及秩定理都是局部分析中的基础性结果. 不仅如此, 该节还对流形上的光滑函数在正则点和非退化临界点附近的性态作了刻画, 后者正是 Morse 引理所描述的. 1.6 节证明了 Sard 定理, 它为许多重要的存在性定理提供理论依据, 希望读者很好地领悟结论, 学会应用. 对正则性概念的进一步延伸是 R.Thom 引入的横截正则性. 1.8 节介绍的 Thom 横截性定理说明 Sard 定理容许我们通过对给定的光滑映射作一个任意小的扰动而成为横截正则映射, 使它处于 "一般位置", 这一类定理是化为一般位置的基础. 尽管有限维微分流形是欧氏空间的非常一般的推广, 但 Whitney 嵌入定理指出它可以作为欧氏空间的嵌入子流形来实现. 流形的浸入与嵌入是微分拓扑研究中的一个重要内容, 我们在 1.7 节介绍了 Whitney 关于浸入与嵌入的经典结果. 值得指出的是这几个定理和 Thom 横截性定理, 它们的证明思路类似. 为得到整体性结果总是着眼于局部深入探讨, 细心体会这类典范做法是很有益处的. 1.2 节介绍的单位分解也是一个很有用的工具, 本书后面几章多次用到它去证明存在性问题. 总的来说, 本章是微分流形理论的基础知识, 也为后续几章的展开提供准备.

1.1　流形的定义及举例

流形的概念是由著名数学家高斯 (Gauss) 首先从数学上对描述地球表面的绘图过程予以推广, 再进一步抽象而形成的. 一群制图人员按下列要求被分成一些小组: (i) 每一块地球表面分配给编号为 i 的一个小组绘制, (ii) 如果分配给编号为 i 和 j 的两个不同小组的两块区域相交, 那么这两个小组必须在各自的地图上特别在其公共区域内精确地并且尽可能详细地标出地图上点的地名, 由此可清楚地知道

在不同的地图上哪些点彼此对应. 每一张独立的地图被画在具有某种坐标的一张纸上, 这些称为卡的纸张全体组成地球表面的一个图册.

基于以上思考, 抽象的流形定义应反映流形的这样一个显著特征: 它在局部是欧氏的, 即对于流形上的每一点, 有一个邻域与欧氏空间的一个开集同胚, 因此可引入局部坐标系. 流形正是由一块块 "欧氏空间" 粘贴起来得到的.

为严格地叙述微分流形的定义, 先陈述分析中已有的概念以作准备.

定义 1.1.1　设 U 为 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集, $\alpha : U \to \mathbb{R}$ 称为 C^k **类** (k 为非负整数) **可微函数**, 如果 α 以及它的阶数直到 k 的所有偏导数在 U 中的每一点存在且连续. 特别, α 是 C^0 类的是指 α 连续. 如果 α 在 U 中每一点有任意阶的连续偏导数, 则称 α 是 C^∞ 的.U 上的无穷次可微函数又称为**光滑函数**或 C^∞ **函数**. 如果 α 在 U 的每一点的一个邻域内可表示为收敛的幂级数, 则称 α 是**解析的**或 C^ω 的.

若 $f : U \to \mathbb{R}^p$ 为映射, f 可用它的分量函数表示为 $f = (f_1, \cdots, f_p)$. 如果 f 的每一个分量函数 $f_i : U \to \mathbb{R}$ 是 C^k 的 $(i = 1, \cdots, p)$, 则称 f 为 U 上的 C^k **类可微映射**或称 f 是 C^k 的. 若每一 $f_i(i = 1, \cdots, p)$ 是 C^∞(或 C^ω) 的, 则称 f 为**光滑** (**或解析**) **映射**, 并记 f 是 C^∞(或 C^ω) 的.

定义 1.1.2　设 M 是一个 Hausdorff 拓扑空间. 若对 M 的每一点 p, 存在点 p 的开邻域 U 和映射

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^m,$$

使得 φ 是 U 到 $\mathbb{R}^m$ 的开子集 $\varphi(U)$ 上的同胚映射, 则称 M 是一个 m **维拓扑流形**. (U, φ) 称为 M 的一个**局部坐标系或局部坐标卡**, U 称为**局部坐标域**. φ 称为**坐标映射**, 并把 $\varphi(p)$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中的坐标 $\varphi_i(p) = x_i(p)(i = 1, \cdots, m)$ 称为点 p 的坐标. 局部坐标系 (U, φ) 有时也记为 $(U; x_1, \cdots, x_m)$ 或 $(U, \varphi; x_i)$.

设 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 和 (U_β, φ_β) 是 m 维流形 M 的两个局部坐标卡. 若 $U_\alpha \bigcap U_\beta \neq \varnothing$, 则 $\varphi_\alpha(U_\alpha \bigcap U_\beta)$ 与 $\varphi_\beta(U_\alpha \bigcap U_\beta)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的两个非空开集, 并且映射

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \bigcap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \bigcap U_\beta)$$

建立了这两个开集之间的同胚, 其逆映射为 $\varphi_\alpha \cdot \varphi_\beta^{-1}|\varphi_\beta(U_\alpha \bigcap U_\beta)$ (见图 1.1).

如果把整个拓扑流形想象为局部是欧氏空间的开集通过粘接而得到的, 那么上述坐标变换则告诉我们如何将它们进行粘合.

从点集拓扑的基本理论立即可得出拓扑流形所具有的拓扑性质. 我们说一个拓扑空间 X 是**局部连通**的, 是指对任意 $x \in X$ 和 x 的任意开邻域 U, 存在 x 的连通邻域 V 使得 $V \subset U$. 如果对任意 $x \in X$ 和 x 的任意开邻域 U, 存在开集 V 使得 V 的闭包 $\overline{V}$ 是紧致的, 并且 $x \in V \subset \overline{V} \subset U$, 则称 X 是**局部紧致空间**. 换言之, 若 X 中的每一点都有一个紧致邻域, 则 X 是局部紧致的.

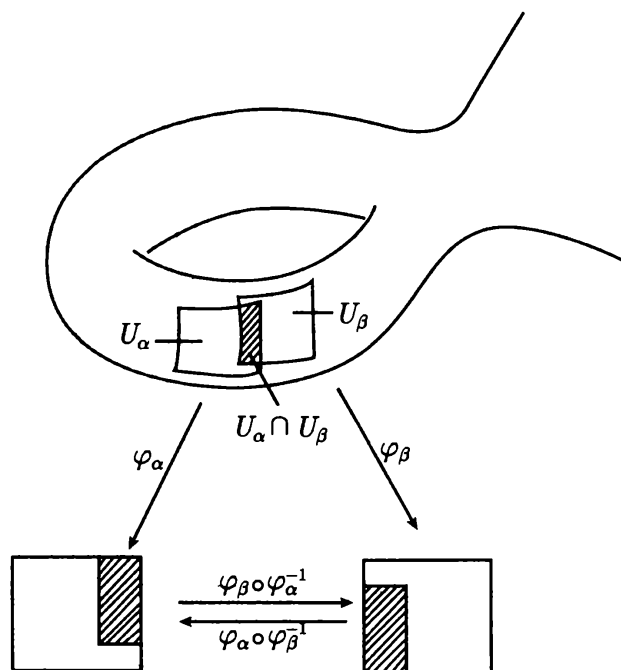


图 1.1

命题 1.1.1 (i) 拓扑流形 M 是局部连通的、局部紧致的完全正则空间.

(ii) 如果 M 满足第二可数性公理, 则 M 是正规的、可度量化的, 并且可以表示为可数个紧致子集的并集.

证明 (i) 设 M 是 m 维拓扑流形. 读者不难验证, 对任意 $p \in M$, 可以选取围绕点 p 的局部坐标卡 (U, φ), 使得 U 拓扑同胚于 $\mathbb{R}^m$ 中以点 $x = \varphi(p)$ 为中心, 以 ε 为半径的开球 $B_x(\varepsilon)$, 因此有 $\varphi(U) = B_x(\varepsilon)$.

现设 V 是点 p 的任意开邻域, 则存在点 p 的开邻域 W, 使得

$$\varphi(W) = B_x(\delta) \subset \overline{B_x(\delta)} \subset \varphi(V), \quad 0 < \delta < \varepsilon.$$

由于 $B_x(\delta)$ 是连通的, 因此 $W = \varphi^{-1}(B_x(\delta))$ 连通, 又 $\overline{B_x(\delta)}$ 是紧致的, 故 $\overline{W}$ 也是紧致的, 于是 M 是局部连通的并且是局部紧致的. 而每一个局部紧致的 Hausdorff 空间都是正则空间因而又是完全正则的, 因此 M 必为完全正则空间.

(ii) 现假定 M 满足第二可数性公理, 又由 (i) 知 M 是正则的, 故 M 是正规空间, 因点集拓扑学中有一个结论是满足第二可数性公理的正则空间是正规的. 而依据 Urysohn 度量化定理, M 还是可度量化的. 余下需证明 M 可表为可数个紧致子集的并.

由于 M 是局部紧致的, 可选取闭包为紧致子集的开集组成 M 的一个开覆盖. 而 M 满足第二可数性公理, 据 Lindelöf 定理, 存在可数子覆盖, 设 $\{W_1, \cdots, W_k, \cdots\}$ 是可数个闭包为紧致集的开集, 它们覆盖了 M. 令 $G_1 = W_1$, 设

$$G_k = W_1 \cup \cdots \cup W_{j_k},$$

令 $j_{k+1} > j_k$ 且它是使得 $\overline{G}_k \subset \bigcup\limits_{i=1}^{j_{k+1}} W_i$ 的最小正整数, 定义

$$G_{k+1}=\bigcup_{i=1}^{j_{k+1}}W_i,$$

则 G_{k+1} 为开集, $\overline{G}_{k+1}$ 为紧致集, $\overline{G}_k\subset G_{k+1}$, 并且

$$M\subset\bigcup_k W_k\subset\bigcup_k G_k\subset\bigcup_k\overline{G}_k\subset M,$$

因此 M 可表为可数个紧致子集的并, 我们说 M 是 σ 紧致的.

下面讨论在拓扑流形 M 上引进微分结构. 我们说 M 的两个局部坐标卡 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 和 (U_β,φ_β) 是 C^k-**相容的** $(1\leqslant k\leqslant+\infty)$, 如果 $U_\alpha\bigcap U_\beta=\varnothing$ 或者当 $U_\alpha\bigcap U_\beta\neq\varnothing$ 时, 坐标变换

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:\varphi_\alpha(U_\alpha\bigcap U_\beta)\to\varphi_\beta(U_\alpha\bigcap U_\beta)$$

和

$$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}:\varphi_\beta(U_\alpha\bigcap U_\beta)\to\varphi_\alpha(U_\alpha\bigcap U_\beta)$$

都是 C^k 映射.

定义 1.1.3 设 M 是一个拓扑流形. 如果 M 上的一个局部坐标卡集 $\mathcal{D}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)|\alpha\in\Lambda\}$ 满足下列条件:

(i) $\mathcal{D}$ 中各坐标卡的定义域覆盖 M, 即 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha=M$,

(ii) $\mathcal{D}$ 中任意两个局部坐标卡是 C^r- 相容的,

(iii) $\mathcal{D}$ 是**极大的**, 即与 $\mathcal{D}$ 中各局部坐标卡 C^r- 相容的任何局部坐标卡必属于 $\mathcal{D}$, 那么 $\mathcal{D}$ 称为 M 的一个 C^r **微分结构**. M 连同给定的 C^r 微分结构叫做 C^r **微分流形**.

注 在上述定义中, 条件 (i)、(ii) 是基本的. 不难证明, 若局部坐标卡集 $\mathcal{D}'$ 满足条件 (i) 和 (ii), 则对任意整数 $s, 0<s\leqslant r$, 存在唯一的 C^s 微分结构 $\mathcal{D}$, 使得 $\mathcal{D}'\subset\mathcal{D}$. 事实上, 若用 $\mathcal{D}$ 表示与 $\mathcal{D}'$ 中的坐标卡都 C^s- 相容的坐标卡所成之集, 则 $\mathcal{D}$ 是一个 C^s 微分结构, 它由 $\mathcal{D}'$ 唯一确定. 因此在构作微分流形时, 只要指出它的一个相容的坐标覆盖就可以了.

今后主要讨论的是 C^∞ 流形, 本书 "微分流形" 一词指的就是这类光滑流形, 在不引起混淆时简称为流形.

例 1 m 维欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 是一个 m 维微分流形.

例 2 不难看出 n 维球面 $S^n=\left\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\middle|\|x\|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n+1}x_i^2}=1\right\}$ 作为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的子空间 (n 为正整数) 是一个 n 维拓扑流形. 现说明它是一个微分流形. 在 S^n 上取北极 $p=\{\underbrace{0,\cdots,0}_{n\text{ 个}},1\}$ 与南极 $q=\{\underbrace{0,\cdots,0}_{n\text{ 个}},-1\}$, 令 $U=S^n-\{p\}$, $V=S^n-\{q\}$.

设 $x=(x_1,\cdots,x_{n+1})\in U$, 连接点 x 与 p 的直线可表为 $y=\lambda x+(1-\lambda)p,\lambda\in\mathbb{R}$. 当 $\lambda=\dfrac{1}{1-x_{n+1}}$ 时, 该直线与坐标面 $y_{n+1}=0$ 相交于一点, 将点 x 对应于该交点的映射记为 φ, 即定义 $\varphi:U\to\mathbb{R}^n=\{y=(y_1,\cdots,y_n,y_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}|y_{n+1}=0\}$ 为

$$\varphi(x)=\frac{x}{1-x_{n+1}}-\frac{x_{n+1}}{1-x_{n+1}}p.$$

类似地, 利用南极可作映射 $\psi:V\to\mathbb{R}^n$. 易见 $\varphi(U\bigcap V)=\mathbb{R}^n-\{0\}$, 而且对于 $y\in\varphi(U\bigcap V)$, 有 $\psi\circ\varphi^{-1}(y)=\dfrac{y}{||y||^2}$, 因而 $\psi\circ\varphi^{-1}\in C^\infty$.

S^n 连同由 $(U,\varphi),(V,\psi)$ 确定的微分结构使之成为 C^∞ 流形.

例 3 n **维实射影空间** RP^n 是微分流形的重要例子, 有几种方法来描述它. 一种是将 RP^n 看作是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中过原点的一切直线之集, 即向量空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的一切 1 维子空间之集. 显然, $\mathbb{R}^{n+1}$ 中过原点的直线由一非零向量 x 决定. 若非零向量 x 与 y 线性相关, 即存在非零实数 λ, 使得 $x=\lambda y$, 则 x 与 y 给出相同的直线, 所以 RP^n 也可以这样描述, 在 $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ 中引入关系 "$\sim$" 如下:$x\sim y$ 当且仅当存在实数 $\lambda\neq 0$, 使得 $x=\lambda y$. "$\sim$" 是一个等价关系. RP^n 定义为商空间 $(\mathbb{R}^{n+1}-\{0\})/\sim$. 如果取 x 和 y 为单位向量, 因而 $x,y\in S^n$, 这时 x 等价于 y(记作 $x\simeq y$) 当且仅当 $x=\pm y$, 于是 $RP^n=S^n/\simeq$.

对于 $x=(x_0,x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$, 用 $[x]=[x_0,x_1,\cdots,x_n]$ 表示它在 $RP^n=(\mathbb{R}^{n+1}-\{0\})/\sim$ 中的等价类, 记 $\pi:\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}\to RP^n,x\mapsto\pi(x)=[x]$ 为投影. 设 $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ 的拓扑为 $\mathcal{J}$, 则

$$\mathcal{J}'=\{U\subset RP^n|\pi^{-1}(U)\in\mathcal{J}\}$$

为 RP^n 上的一个拓扑, 称为商拓扑或粘合拓扑.

下面证明 RP^n 为 n 维微分流形. 首先任取 $[x],[y]\in RP^n,[x]\neq[y]$, 则存在含 $\pi^{-1}([x])$ 的以原点为顶点的去顶开锥体 V_x 和含 $\pi^{-1}([y])$ 的以原点为顶点的去顶开锥体 V_y, 使得 $V_x\bigcap V_y=\varnothing$, 因而 $\pi(V_x)$ 与 $\pi(V_y)$ 分别是含 $[x]$ 和 $[y]$ 的不交开邻域, 故 RP^n 是 T_2 空间.

其次, 对每个整数 $k=0,1,\cdots,n$, 令

$$U_k=\{[x]\in RP^n|x_k\neq 0\},$$

易见它是 RP^n 中的开集, 并且 $\bigcup\limits_{k=0}^{n}U_k=RP^n$. 定义 $\varphi_k:U_k\to\mathbb{R}^n$ 为

$$\varphi_k([x_0,x_1,\cdots,x_n])=\left(\frac{x_0}{x_k},\cdots,\frac{x_{k-1}}{x_k},\frac{x_{k+1}}{x_k},\cdots,\frac{x_n}{x_k}\right),$$

于是得到坐标卡 $(U_k,\varphi_k), k=0,1,\cdots,n$. 若 $k\neq l$, 例如 $k<l$, 容易算出

$$\varphi_l\circ\varphi_k^{-1}(y_1,\cdots,y_n)=\left(\frac{y_1}{y_l},\cdots,\frac{1}{y_l},\cdots,\frac{y_{l-1}}{y_l},\frac{y_{l+1}}{y_l},\cdots,\frac{y_n}{y_l}\right),$$

其中 $\frac{1}{y_l}$ 出现在第 $k+1$ 个位置上. 因为对于 $y\in\varphi_k(U_k\bigcap U_l)$, 总有 $y_l\neq 0$, 因此 $\varphi_l\circ\varphi_k^{-1}$ 是 C^∞ 映射.

例 4　微分流形 $(M,\mathcal{D})$ 的开子集 U 也是一个微分流形, 带有如下微分结构

$$\mathcal{D}_U=\{(U_\alpha\bigcap U,\varphi_\alpha|_{U_\alpha\cap U})|(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathcal{D}\}.$$

下面是一个重要实例. 令 $M(n)$ 为一切 $n\times n$ 实矩阵之集. 作为集而言, $M(n)$ 可以与 $\mathbb{R}^{n^2}$ 建立双射. 而 $\mathbb{R}^{n^2}$ 是一个 n^2 维微分流形, 因此可赋予 $M(n)$ 拓扑结构与微分结构, 使 $M(n)$ 成为一个微分流形. 令 $GL(n,\mathbb{R})\subset M(n)$ 是所有非退化的 $n\times n$ 矩阵之集. 矩阵 A 非退化是指其行列式 $\det(A)\neq 0$. 因 $\det(A)$ 是 A 的连续函数, 故 $GL(n,\mathbb{R})$ 作为 $M(n)$ 的开子集是微分流形. 又 $GL(n,\mathbb{R})$ 在矩阵乘法运算下组成一个群, 称为**实一般线性群**, 这是李群的一个重要例子 (见第 3 章).

例 5 (积流形)　设 $(M_1,\mathcal{D}_1)$ 和 $(M_2,\mathcal{D}_2)$ 是维数分别为 m_1 和 m_2 的微分流形, 则 $M_1\times M_2$ 是一个 (m_1+m_2) 维微分流形, 其微分结构 $\mathcal{D}$ 由

$$\{(U_\alpha\times V_\beta,\varphi_\alpha\times\psi_\beta)|(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathcal{D}_1,(V_\beta,\psi_\beta)\in\mathcal{D}_2\}$$

所决定.

例如, 环面 $T^2=S^1\times S^1$ 作为两个 S^1 的积流形是 2 维 C^∞ 流形, n 维环面 $T^n=S^1\times\cdots\times S^1$ 是 n 个 S^1 的 C^∞ 积流形.

定义 1.1.4　设 M 为 m 维微分流形, S 是 M 的一个子集. 如果对每一 $p\in S$, 存在围绕点 p 的局部坐标卡 (U,φ), 使得

$$\varphi(U\bigcap S)=\varphi(U)\bigcap(\mathbb{R}^s\times\{0\}),$$

则称 S 为 M 的 s 维 **(正则) 子流形**, $m-s$ 称为 S 在 M 中的**余维数**(见图 1.2).

易见, $(U\bigcap S,\varphi|_{U\cap S})$ 为子流形 S 中围绕点 p 的一个局部坐标卡.

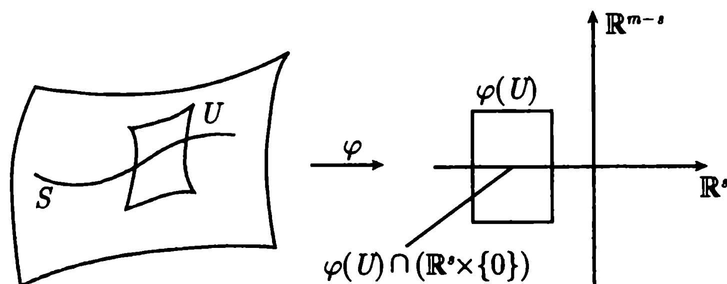


图 1.2

例 6 设 $M(n,p)$ 为一切 $n\times p$ 实矩阵组成的空间, 具有欧氏空间 $\mathbb{R}^{np}$ 的微分结构. 令 $M(n,p;k)$ 表示秩为 k 的 $n\times p$ 矩阵组成的子空间, 则 $M(n,p;k)$ 是 $M(n,p)$ 的 $k(n+p-k)$ 维正则子流形, 其中 $0<k\leqslant\min\{n,p\}$.

证明 左上角的 $k\times k$ 子阵非退化的 $n\times p$ 矩阵全体组成 $M(n,p)$ 的一个开子集, 记为 G_0. 当 $X\in G_0$ 时, X 可以写为下列分块矩阵形式

$$X=\underbrace{\left[\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline C & D \end{array}\right]}_{k\quad p-k}\begin{array}{l}\}k\\ \}n-k\end{array},\quad \det A\neq 0.$$

记 $U_0=G_0\bigcap M(n,p;k)$, 则 $X\in U_0\Leftrightarrow D=CA^{-1}B$. 事实上,

$$\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ -CA^{-1} & I_{n-k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & -CA^{-1}B+D\end{bmatrix},$$

其中 I_k,I_{n-k} 分别为 $k\times k$ 单位矩阵与 $(n-k)\times(n-k)$ 单位矩阵, 因此

$$\operatorname{Rank}\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & -CA^{-1}B+D\end{bmatrix}=\operatorname{Rank}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix}=k \text{ 当且仅当 } D=CA^{-1}B.$$

这说明 X 的各子块中, A, B, C 这三个子块是独立的, 第四个子块 D 由 A, B,C 这三个子块所决定. 我们可以选取 A, B 和 C 这三个子块的分量 (共有 $np-(n-k)(p-k)=k(n+p-k)$ 个) 作为 U_0 中矩阵的局部坐标.

定义 $\varphi_0:U_0\to\mathbb{R}^{k(n+p-k)}\times\{0\}\subset\mathbb{R}^{np}$ 为

$$\varphi_0\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0\end{bmatrix},$$

那么 (U_0,φ_0) 就是 $M(n,p;k)$ 的一个局部坐标卡.

对一般的 $X_\alpha\in M(n,p;k),X_\alpha$ 的左上角的 $k\times k$ 子阵不一定非退化, 但通过矩阵的初等变换, 即交换行与列的位置可以使得左上角的 $k\times k$ 子阵非退化. 换句话说, 可选取 $n\times n$ 置换阵 P_α 和 $p\times p$ 置换阵 Q_α, 使得 $P_\alpha X_\alpha Q_\alpha$ 的左上角的 $k\times k$ 子阵非退化, 因而 $P_\alpha X_\alpha Q_\alpha\in U_0$. 令

$$U_\alpha=P_\alpha^{-1}U_0Q_\alpha^{-1},$$

它是 $M(n,p;k)$ 中的开集. 在 U_α 上定义局部坐标

$$\varphi_\alpha(X_\alpha)=\varphi_0(P_\alpha X_\alpha Q_\alpha),$$

于是 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 便成为 $M(n,p;k)$ 的一个局部坐标卡.

注意这样的开集 U_α 共有 $\mathrm{C}_n^k\mathrm{C}_p^k$ 个便可将 $M(n,p;k)$ 覆盖, 将它们记为 U_0, $U_1,\cdots,U_{\ell-1}$, 其中 $\ell=\mathrm{C}_n^k\mathrm{C}_p^k$. 如果 $U_i\bigcap U_j\neq\varnothing$, 那么

$$\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}\left(\begin{bmatrix}A & B\\ C & 0\end{bmatrix}\right)=\varphi_0\left(P_jP_i^{-1}\begin{bmatrix}A & B\\ C & CA^{-1}B\end{bmatrix}Q_i^{-1}Q_j\right),$$

它显然是 C^∞ 映射.

下面讨论微分流形之间的可微映射, 首先从可微函数说起.

定义 1.1.5　设 $f:M\to\mathbb{R}$ 是定义在 m 维 $C^r(r\geqslant 1)$ 微分流形 M 上的实函数, (U,φ) 为包含点 $p\in M$ 的局部坐标卡, 则 $f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\mathbb{R}$ 是定义在 $\mathbb{R}^m$ 的开集 $\varphi(U)$ 上的实函数, 称为 f 在点 p 邻近的**局部表示**. 若 $f\circ\varphi^{-1}$ 在点 $\varphi(p)\in\mathbb{R}^m$ 是 C^r 可微的, 则称函数 f 在点 $p\in M$ 是 C^r **可微的**. 若 $f\circ\varphi^{-1}$ 在 $\varphi(U)$ 上是 C^r 可微的, 则称 f 是 U 上的 C^r **可微函数**.

函数 f 在点 p 的可微性与包含点 p 的局部坐标卡的选取无关. 假若 (V,ψ) 是另一个包含点 p 的局部坐标卡, 则 $U\bigcap V\neq\varnothing$, 且

$$f\circ\psi^{-1}=(f\circ\varphi^{-1})\circ(\varphi\circ\psi^{-1}).$$

因 $\varphi\circ\psi^{-1}$ 是 C^r 的, 所以 $f\circ\psi^{-1}$ 在点 $\psi(p)$ 也是 C^r 可微的.

J. W. Milnor 在文献 [3] 中曾用一族定义在 M 的开子集上的可微函数来界定 M 的微分结构, 现陈述如下.

拓扑流形 M 上的一个 $C^r(r\geqslant 1)$ 微分结构 $\mathcal{D}$ 乃是一族定义在 M 的开子集上的实值函数, 满足下列条件:

(1) 对于 M 的每一点 p, 存在 p 的一个开邻域 U 以及从 U 到 $\mathbb{R}^m$ 的一个开子集上的同胚 φ, 使得定义在 U 的开子集 W 上的函数 f 属于 $\mathcal{D}$ 当且仅当 $f\circ\varphi^{-1}$ 是 C^r 可微的;

(2) 若 U_i 都是包含于 f 的定义域中的开子集, 且 $U=\bigcup\limits_i U_i$, 则 $f|_U\in\mathcal{D}$ 当且仅当对于每一 i, $f|_{U_i}\in\mathcal{D}$.

读者不难验证, 关于微分结构的上述两个定义是等价的.

定义 1.1.6　设 M 和 N 为 $C^r(r\geqslant 1)$ 流形, $f:M\to N$ 为连续映射, $p\in M$. 在 M 和 N 上分别选取含点 p 及点 $f(p)\in N$ 的局部坐标卡 (U,φ) 与 (V,ψ), 不妨设 $f(U)\subset V$(必要时缩小 U). 若映射

$$\tilde{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$$

在点 $\varphi(p)$ 是 C^r 的, 则称映射 f 在点 p 是 C^r 的, 并且 $\tilde{f}$ 称为 f 在点 p 邻近的**局部表示** (图 1.3). 如果 f 在 M 的每一点处都是 C^r 的, 则称 f 为 C^r **映射**. C^∞ 映射又称为**光滑映射**.

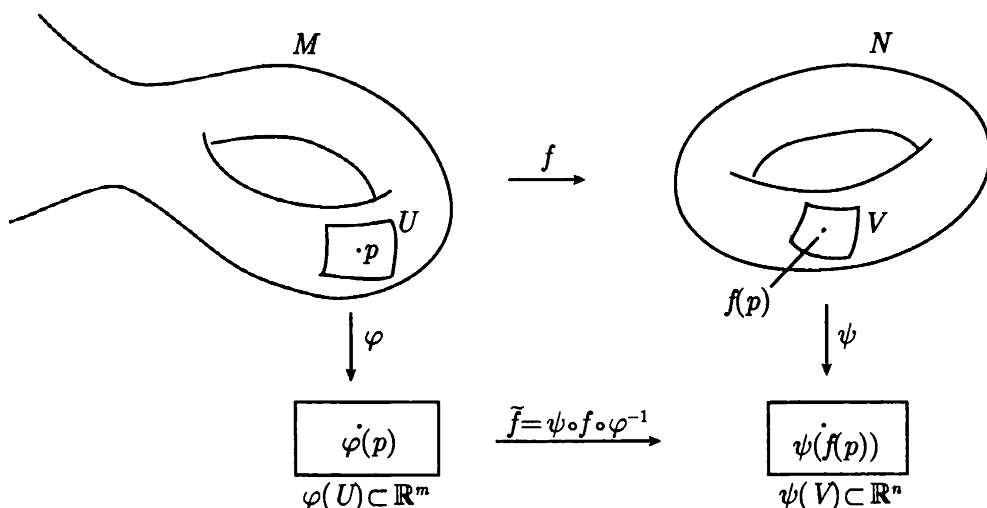


图 1.3

读者不难验证, 映射 f 的可微性与局部坐标卡的选取无关.

定义 1.1.7 设 M, N 均为 $C^r(r \geqslant 1)$ 流形. 若 $f: M \to N$ 为双射, 并且 f 和 f^{-1} 都是 C^r 映射, 则称 f 为 C^r **微分同胚**, 简称为**微分同胚**, C^∞ 微分同胚又称为**光滑同胚**, 在不引起混淆时也说成微分同胚.

上面我们定义了以 m 维欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 中的开集为局部模型的流形, 但平面上的闭圆盘、3 维欧氏空间中的闭球体、Möbius 带等都不属于这类无边流形, 因此需考虑以半空间

$$\mathrm{H}^m = \{x = (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m | x_m \geqslant 0\}$$

中的开集为局部模型的流形, 称之为带边流形.

定义 1.1.8 一个 m **维带边流形** M 是一个局部同胚于 H^m 中开集的 Hausdorff 空间. (U, φ) 叫做 M 的一个局部坐标卡或局部坐标系, 如果 U 是 M 的一个开集, $\varphi: U \to \mathrm{H}^m$ 是从 U 到 H^m 的开子集 $\varphi(U)$ 上的同胚映射.

M 的两个坐标卡 (U, φ) 和 (V, ψ) 是 $C^r(r \geqslant 1)$ 相容的, 如果 $U \bigcap V = \varnothing$ 或当 $U \bigcap V \neq \varnothing$ 时, 坐标变换

$$\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \bigcap V) \to \psi(U \bigcap V) \text{ 和 } \varphi \circ \psi^{-1}: \psi(U \bigcap V) \to \varphi(U \bigcap V)$$

都是 C^r 映射.

注意的是, $\varphi(U \bigcap V)$(及$\psi(U \bigcap V)$) 是 H^m 中的开集, 并不一定是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集. 映射

$$\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \bigcap V) \to \mathbb{R}^m$$

是 C^r 映射理解为存在 $\mathbb{R}^m$ 中开集 $G \supset \varphi(U \bigcap V)$, 使得 $\psi \circ \varphi^{-1}$ 可扩充定义在 G 上, 并且扩充后的映射是从 G 到 $\mathbb{R}^m$ 的 C^r 映射.

M 上的微分结构可参照定义 1.1.3 写出, 不再赘述.

点 $p \in M$ 称为带边流形 M 的一个**边界点**, 如果存在坐标卡 (U, φ), 使得 $p \in U$ 并且 $\varphi(p) \in \{(x_1, \cdots, x_m) \in \mathrm{H}^m | x_m = 0\}$ (见图 1.4).

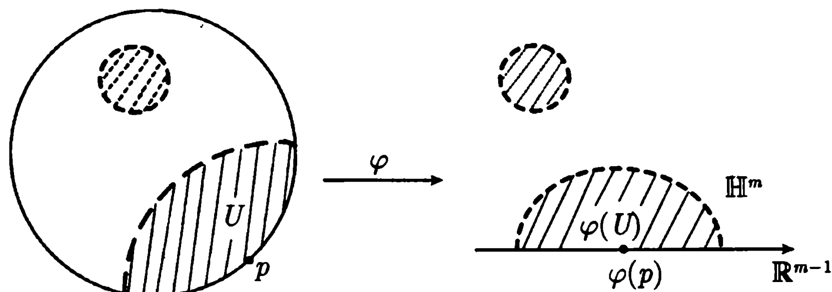


图 1.4

M 的全体边界点的集合称为 M 的**边界**, 记为 ∂M. ∂M 是完全确定的, 因为 $\mathbb{R}^m$ 中的一个开集在它到 $\mathbb{R}^m$ 中的一同胚下的像必定是开集 (依据 Brouwer 区域不变性定理). 如果 $\partial M \neq \varnothing$, 那么 ∂M 是一个 $m-1$ 维无边流形.

最后简述微分流形发展史中的一个经典问题: 是否每一个拓扑流形都可赋予微分结构? 再有, 如果一个拓扑流形具有微分结构, 是否唯一? 对于这样的经典难题, M. Kervaire 于 1960 年证明了有这样的拓扑流形, 它根本没有微分结构 (见文献 [4]). 而 J. W. Milnor 于 1956 年发表的论文给出了一个与 7 维标准球面 S^7 同胚但不微分同胚的微分流形, 人们称之为 Milnor 怪球 (见文献 [5]). 进而, Kervaire 和 Milnor 于 1962 年证明了在 S^7 上共有 28 种不微分同胚的微分结构 (见文献 [6]).

1.2 单 位 分 解

在流形研究中有一种常用的手法是先局部后整体, 这就是通过局部分析构作具有某种性质的函数 (映射) 或结构, 然后再拼接成一整体函数 (映射) 或整体结构. 或者反过来, 把整体结构表示成局部结构的局部有限和. 不论哪一种情形, 单位分解都是一个极为有用的工具. 借助于单位分解可证明一系列存在性定理, 例如讨论微分流形上黎曼度量的存在性、流形上积分的建立、Stokes 定理的严格证明等都需要用到它.

仿紧性蕴涵着单位分解的存在性. 本节在引入仿紧性概念后, 将证明满足第二可数性公理的流形必为仿紧的, 然后导出单位分解的存在性.

定义 1.2.1 设 X 是一个拓扑空间. X 的两个覆盖 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{W}$ 如果满足下列条件: 对每一个 $V \in \mathcal{V}$, 存在 $W \in \mathcal{W}$ 使得 $V \subset W$, 那么称 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{W}$ 的一个**加细**, 记作 $\mathcal{V} \prec \mathcal{W}$.

给定 X 的子集族 $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$. 如果对每一 $p \in X$, 存在点 p 的开邻域 U, 使得 $U \bigcap A_\alpha \neq \varnothing$ 仅对有限多个 α 成立, 即 U 仅与 $\mathcal{A}$ 中有限个成员的交非空, 我们说

$\mathcal{A}$ 是局部有限的.

如果拓扑空间 X 的每个开覆盖 $\mathcal{U}$ 都有一个加细的局部有限的开覆盖 $\mathcal{V}$, 则 X 称为**仿紧空间**.

点集拓扑学中有一个定理是说: 若拓扑空间 X 是局部紧致并且具有可数拓扑基的 Hausdorff 空间, 则 X 是仿紧的. 下面就微分流形来讨论.

命题 1.2.1 设 M 是一个满足第二可数性公理的微分流形, 则对 M 的任意一个开覆盖 $\mathcal{Q}$, 存在 M 的可数个局部坐标卡 (U_i, φ_i) 和开集 V_i, W_i, 使得

$$W_i \subset V_i \subset U_i, \quad i = 1, 2, \cdots,$$

并且满足下列条件:

(i) $\mathcal{U} = \{U_i | i \in \mathbb{N}\}$ 是局部有限族, 且 $\mathcal{U} \prec \mathcal{Q}$,

(ii) $\varphi_i(U_i) = B_0(3), \varphi_i(V_i) = B_0(2), \varphi_i(W_i) = B_0(1), i = 1, 2, \cdots$,

(iii) $\mathcal{W} = \{W_i\}$ 覆盖 M.

证明 在命题 1.1.1(ii) 中证明 M 可以表为可数个紧致子集的并时, 我们得到了一个开集序列 $\{G_k : k = 1, 2, \cdots\}$, 满足下列条件:

(1) $\overline{G}_k$ 是紧致的, $k = 1, 2, \cdots$,

(2) $\overline{G}_k \subset G_{k+1}, k = 1, 2, \cdots$,

(3) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \overline{G}_k = M$.

再约定 $G_0 = G_{-1} = \varnothing$. 显然, $\overline{G}_k - G_{k-1}$ 是紧致的, $G_{k+1} - \overline{G}_{k-2}$ 是开集, $\overline{G}_k - G_{k-1} \subset G_{k+1} - \overline{G}_{k-2}$, 并且 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left(\overline{G}_k - G_{k-1}\right) = M$.

对任意 $p \in \overline{G}_k - G_{k-1}$, 存在 $Q \in \mathcal{Q}$ 使得 $p \in Q$, 因而存在 M 的局部坐标卡 (U, φ) 满足

(1) $p \in U \subset \left(G_{k+1} - \overline{G}_{k-2}\right) \bigcap Q$,

(2) $\varphi(p) = 0$, $\varphi(U) = B_0(3)$.

令 $V = \varphi^{-1}(B_0(2))$, $W = \varphi^{-1}(B_0(1))$.

由于 $\overline{G}_k - G_{k-1}$ 是紧致的, 故存在有限个点 $p_{(k,1)}, \cdots, p_{(k,i_k)}$, 使得对应的 $W_{(k,1)}, \cdots, W_{(k,i_k)}$ 覆盖 $\overline{G}_k - G_{k-1}$. 令

$$\mathcal{U} = \{U_{(k,j)}\}, \mathcal{V} = \{V_{(k,j)}\}, \mathcal{W} = \{W_{(k,j)}\}, \quad j = 1, \cdots, i_k, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

结论 (ii), (iii) 显然满足, 并且 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{Q}$ 的加细, 下面说明 $\mathcal{U}$ 是局部有限的. 任取点 $p \in M$, 可假定 $p \in G_l$. 因为

$$G_l \bigcap U_{(k,j)} = \varnothing, \quad 对 k \geqslant l + 2, 1 \leqslant j \leqslant i_k$$

均成立, 所以点 p 的开邻域 G_l 仅与 $\mathcal{U}$ 中有限个成员相交. 于是结论 (i) 亦真, 命题得证.

推论 1.2.1 满足第二可数性公理的微分流形是仿紧的.

下面讨论流形上的单位分解. 设 $\lambda: M\to\mathbb{R}$ 为 C^∞ 函数, 记

$$\mathrm{Supp}\lambda=\overline{\lambda^{-1}(\mathbb{R}-\{0\})}=\overline{\{p\in M|\lambda(p)\neq 0\}},$$

并把它叫做函数 λ 的**支集**.

定义 1.2.2 设 $\{\lambda_i: M\to\mathbb{R}|i\in I\}$ 是流形 M 上的一族 C^∞ 函数 (I 为指标集). 如果它满足

(i) $\{\mathrm{Supp}\lambda_i|i\in I\}$ 是局部有限的,

(ii) 对所有 $p\in M, \sum\limits_{i\in I}\lambda_i(p)=1$, 并且对所有 $p\in M$ 和 $i\in I, \lambda_i(p)\geqslant 0$, 则称 $\{\lambda_i|i\in I\}$ 为 M 上的一个**单位分解**. 此外,

(iii) 若对 M 的开覆盖 $\mathcal{U}$, 有 $\{\mathrm{Supp}\lambda_i|i\in I\}\prec\mathcal{U}$, 则称 $\{\lambda_i|i\in I\}$ 为**从属于覆盖 $\mathcal{U}$ 的单位分解**.

引理 1.2.1 对 $x=(x_1,\cdots,x_m)\in\mathbb{R}^m$, 记 $\|x\|=\left(\sum\limits_{i=1}^m x_i^2\right)^{1/2}$, 则存在 C^∞ 函数 $\xi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 合于下列要求：当 $\|x\|\leqslant 1$ 时, $\xi(x)=1$; 当 $1<\|x\|<2$ 时, $0<\xi(x)<1$; 当 $\|x\|\geqslant 2$ 时, $\xi(x)=0$.

证明 设 $\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\lambda(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}, & t>0\\ 0, & t\leqslant 0,\end{cases}$$

则

$$\lambda^{(n)}(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{t}}P_{2n}\left(\dfrac{1}{t}\right), & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $P_{2n}\left(\dfrac{1}{t}\right)$ 是关于 $\dfrac{1}{t}$ 的 $2n$ 次多项式, 因此 λ 为 C^∞ 函数. 令 $\zeta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\zeta(t)=\frac{\lambda(4-t^2)}{\lambda(4-t^2)+\lambda(t^2-1)},$$

不难看出, 对任意 $t\in\mathbb{R}$, 上式右端的分母恒为正, 因此 ζ 也是 C^∞ 函数, 并且当 $|t|\leqslant 1$ 时, $\zeta(t)=1$; 当 $1<|t|<2$ 时, $0<\zeta(t)<1$; 当 $|t|\geqslant 2$ 时, $\zeta(t)=0$. 然后定义 $\xi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ 为

$$\xi(x)=\zeta(\|x\|),$$

则 ξ 就是所求的 C^∞ 函数.

引理 1.2.2 设流形 M 满足第二可数性公理, (U,φ) 是围绕点 $p\in M$ 的局部坐标卡, V, W 为 M 中开集, 满足 $p\in W\subset\overline{W}\subset V\subset\overline{V}\subset U$ 并且 $\varphi(p)=0,\varphi(W)=B_0(1),\varphi(V)=B_0(2),\varphi(U)=B_0(3)$, 则存在 C^∞ 函数 $\eta:M\to\mathbb{R}$ 合于下列条件: 当 $q\in\overline{W}$ 时, $\eta(q)=1$; 当 $q\in V-\overline{W}$ 时, $0<\eta(q)<1$; 当 $q\in M-V$ 时, $\eta(q)=0$.

证明提要 令 $\eta:M\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\eta(q)=\begin{cases}\xi(\varphi(q)), & q\in U,\\ 0, & q\in M-U,\end{cases}$$

其中 ξ 如引理 1.2.1 中所述.

定理 1.2.1 (单位分解的存在性) 设 M 是满足第二可数性公理的微分流形, $\mathcal{Q}$ 为 M 的任意开覆盖, 那么存在一个从属于 $\mathcal{Q}$ 的可数单位分解 $\{\lambda_i|i\in\mathbb{N}\}$, 而且对每个 i, $\text{Supp}\lambda_i$ 都是紧致的.

证明 由命题 1.2.1, 存在 M 的可数个局部坐标卡 (U_i,φ_i) 和开集 V_i,W_i, 使得

$$\varphi_i(U_i)=B_0(3),\varphi_i(V_i)=B_0(2),\varphi_i(W_i)=B_0(1),\quad i=1,2,\cdots,$$

并且局部有限族 $\mathcal{U}=\{U_i\}$ 是 $\mathcal{Q}$ 的加细, $\mathcal{W}=\{W_i\}$ 覆盖 M.

对 $W_i\subset V_i\subset U_i$, 依引理 1.2.2, 存在 C^∞ 函数 $\eta_i:M\to\mathbb{R}$ 满足如下条件: 当 $q\in\overline{W_i}$ 时, $\eta_i(q)=1$; 当 $q\in V_i-\overline{W_i}$ 时, $0<\eta_i(q)<1$; 当 $q\in M-V_i$ 时, $\eta_i(q)=0$.

因为 $\mathcal{U}$ 是局部有限的, 因此对任意 $p\in M$ 必有点 p 的开邻域 X_p, 使得除有限个 U_i 外, $\eta_i|_{X_p}=0$, 于是 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\eta_i$ 在局部是一有限和, 这说明 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\eta_i$ 是 M 上的 C^∞ 函数, 并且对每一 $q\in M$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\eta_i(q)<+\infty$. 而 $\mathcal{W}$ 是 M 的覆盖, 故 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\eta_i(q)\geqslant 1$. 我们定义

$$\lambda_i=\eta_i\Big/\sum_{j=1}^{\infty}\eta_j.$$

显然, 当 $q\in V_i$ 时, $\lambda_i(q)>0$; 当 $q\in M-V_i$ 时, $\lambda_i(q)=0$. 又

$$\text{Supp}\lambda_i\subset\overline{V}_i\subset U_i,\quad i=1,2,\cdots,$$

从而 $\text{Supp}\lambda_i$ 是紧致的, 并且 $\{\text{Supp}\lambda_i\}\prec\mathcal{U}\prec\mathcal{Q}$, $\{\lambda_i|i\in\mathbb{N}\}$ 为从属于 $\mathcal{Q}$ 的单位分解.

推论 1.2.2　设流形 M 满足第二可数性公理, F 为 M 的非空闭子集, G 为 M 的开集且 $F \subset G$, 则存在 C^∞ 函数 $\mu : M \to \mathbb{R}$, 使得

$$F \subset \{p \in M | \mu(p) = 1\} \subset \mathrm{Supp}\mu \subset G.$$

若 F 是紧致子集, 则 $\mathrm{Supp}\mu$ 也是紧致子集.

证明　令 $H = M - F$, 则 $\mathcal{Q} = \{G, H\}$ 是 M 的开覆盖. 依定理 1.2.1, 存在从属于 $\mathcal{Q}$ 的单位分解 $\{\lambda_i | i \in \mathbb{N}\}$. 令

$$\mu = \sum_{\mathrm{Supp}\lambda_i \subset G} \lambda_i,$$

易见

$$F \subset \{p \in M | \mu(p) = 1\} \subset \mathrm{Supp}\mu \subset G.$$

若 F 是紧致子集, 不难推出存在 M 的开集 O, 使得 $\overline{O}$ 是紧致的, 并且 $F \subset O \subset \overline{O} \subset G$. 对于 F 和 O, 利用上面的结果, 可以得到 C^∞ 函数 $\mu_0 : M \to \mathbb{R}$, 满足下列条件

$$F \subset \{p \in M | \mu_0(p) = 1\} \subset \mathrm{Supp}\mu_0 \subset O.$$

而 $\overline{O}$ 是紧致的, 故 $\mathrm{Supp}\mu_0$ 也是紧致的.

从现在开始, 本书所述的微分流形皆满足第二可数性公理.

1.3　切空间、切映射及其对偶

1.3.1　切空间与切映射

欧氏空间 $\mathbb{R}^m$ 中点 p 处的向量 $v = (v_1, \cdots, v_m)$ 可看作是一种运算, 它作用于定义在点 p 的邻域上的可微函数. 设函数 f 在点 p 的邻域上可微, 则 v 作用于 f 得实数 $v(f) = v_1 \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right|_p + \cdots + v_m \left.\dfrac{\partial f}{\partial x_m}\right|_p$, 即 f 沿方向 v 的方向导数. 该运算具有下列两个性质:

(i) $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$;

(ii) $v(f \cdot g) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$,

其中 f 和 g 在点 p 的邻域上可微, λ 与 μ 为实数. 性质 (i) 说明 v 线性地作用在可微函数上, 性质 (ii) 说明 v 作为求导算子满足莱布尼兹法则. 此外, 向量 v 被它在点 p 附近定义的所有可微函数上的值所确定. 我们将利用这些性质来定义流形上的切向量. 由于求导这一运算仅涉及函数的局部性质, 首先我们引入函数芽的概念. 为简单起见, 就光滑情形讨论.

定义 1.3.1 设 M 为 m 维光滑流形, U 和 V 为点 $p \in M$ 的两个开邻域. C^∞ 函数 $\tilde{\alpha} : U \to \mathbb{R}$ 和 $\tilde{\beta} : V \to \mathbb{R}$ 在点 p 具有相同的芽是指存在点 p 的开邻域 $W \subset U \bigcap V$, 使得 $\tilde{\alpha}|_W = \tilde{\beta}|_W$. 以 $\tilde{\alpha}$ (或 $\tilde{\beta}$) 为代表的等价类记为 $\alpha : (M,p) \to \mathbb{R}$, 称为 C^∞**函数芽**.

将 C^∞ 函数在点 $p \in M$ 处的芽组成之集记为 $\varepsilon(M,p)$ 或简记为 $\varepsilon(p)$. 在 $\varepsilon(p)$ 中可引入加法、纯量乘法及乘法运算, 事实上可通过函数芽的代表的相应运算来定义, 并且容易验证 $\varepsilon(p)$ 对于加法与乘法做成一个具有单位元的交换环, 实际上它还是一个实代数. $\mu_p = \{\alpha \in \varepsilon(p) | \alpha(p) = 0\}$ 是环 $\varepsilon(p)$ 中唯一的极大理想.

定义 1.3.2 设 M 和 N 为 C^∞ 流形, $p \in M$. C^∞**映射芽**$f : (M,p) \to N$ 指的是 C^∞ 映射 $\tilde{f} : U \to N$ 的一个等价类, 这里 U 为点 p 在 M 中的开邻域. 等价关系 "$\sim$" 规定如下: $(\tilde{f} : U \to N) \sim (\tilde{g} : V \to N)$ 当且仅当存在点 p 在 M 中的开邻域 $W \subset U \bigcap V$, 使得 $\tilde{f}|_W = \tilde{g}|_W$, 等价类 f 所含的任意成员叫做 f 的代表.

有关映射的许多标准概念可以用明显的方式延伸到映射芽. 例如映射芽 $f : (M,p) \to (N,q)$(这里 $q = f(p)$) 与 $g : (N,q) \to (L,r)$ 可以复合成映射芽 $g \circ f : (M,p) \to (L,r)$. 设 $\tilde{f} : U \to N, \tilde{g} : V \to L$ 分别为 f 和 g 的代表, 则 $\tilde{f}\Big|_{(U \bigcap \tilde{f}^{-1}(V))}$ 也是 f 的一个代表, 通常的映射复合 $\tilde{g} \circ \tilde{f} : U \bigcap \tilde{f}^{-1}(V) \to L$ 便是 $g \circ f$ 的一个代表.

定义 1.3.3 设 $f : (M,p) \to (N,q)$ 为 C^∞ 映射芽. 定义 $f^* : \varepsilon(q) \to \varepsilon(p)$ 为

$$f^*(\alpha) = \alpha \circ f, \quad 对每一 \ \alpha \in \varepsilon(q).$$

易见 f^* 是一个环同态, 实际上它还是一个代数同态. f^* 具有下列函子性质:

(i) 若 $f : (M,p) \to (N,q)$ 和 $g : (N,q) \to (L,r)$ 为 C^∞ 映射芽, 则

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

(ii) 若 $id : (M,p) \to (M,p)$ 为恒同映射芽, 则 $id^* : \varepsilon(p) \to \varepsilon(p)$ 为恒同同态.

定义 1.3.4 C^∞ 流形 M 在点 $p \in M$ 处的一个**切向量**X 是实代数 $\varepsilon(p)$ 的一个线性求导算子, 即 $X : \varepsilon(p) \to \mathbb{R}$ 满足如下条件: 对任意 $\alpha, \beta \in \varepsilon(p), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

(i) $X(\lambda\alpha + \mu\beta) = \lambda X(\alpha) + \mu X(\beta)$,

(ii) $X(\alpha \cdot \beta) = \alpha(p)X(\beta) + \beta(p)X(\alpha)$.

将 M 在点 p 处的切向量所成之集记为 T_pM, 称为 M 在点 p 处的**切空间**.

设 $X, Y \in T_pM, \lambda \in \mathbb{R}$, 规定

$$(X + Y)(\alpha) = X(\alpha) + Y(\alpha), \quad (\lambda X)(\alpha) = \lambda \cdot X(\alpha),$$

其中 $\alpha \in \varepsilon(p)$. 容易验证 $X + Y$ 和 λX 均为点 p 处的切向量, 并且 T_pM 是实向量

空间. 因此流形 M 在点 p 处的切空间可定义为 $\varepsilon(p)$ 的线性求导算子组成的实向量空间.

例 1　设 c 为常值函数芽, 取值为 c, 则对任意 $X \in T_pM$, 有 $X(c) = 0$.

事实上, $X(1) = X(1 \cdot 1) = 1 \cdot X(1) + 1 \cdot X(1) = 2X(1)$, 于是 $X(1) = 0$ 并且 $X(c) = cX(1) = 0$.

定义 1.3.5　设 $f : (M,p) \to (N,q)$ 为 C^∞ 映射芽, f 在点 p 处的**切映射**(或**微分**)$(\mathrm{d}f)_p : T_pM \to T_qN$ 定义为

$$(\mathrm{d}f)_p(X) = X \circ f^*, \quad 对每一\ X \in T_pM.$$

易见, 对每一 $X \in T_pM, X \circ f^* \in T_qN$, 并且 $(\mathrm{d}f)_p$ 是线性映射. 又对任意 $\alpha \in \varepsilon(q)$, 有

$$(\mathrm{d}f)_p(X)(\alpha) = X \circ f^*(\alpha) = X(\alpha \circ f). \tag{1}$$

切映射具有下列基本性质.

命题 1.3.1　(i) 链法则　设 $f : (M,p) \to (N,q)$ 与 $g : (N,q) \to (L,r)$ 为 C^∞ 映射芽, 则 $(\mathrm{d}(g \circ f))_p = (\mathrm{d}g)_q \circ (\mathrm{d}f)_p$.

(ii) 设 $id : (M,p) \to (M,p)$ 为恒同映射芽, 则 $(\mathrm{d}(id))_p$ 为 T_pM 上的恒同映射, 即 $(\mathrm{d}(id))_p = id_{T_pM}$.

证明留作练习.

由命题 1.3.1 可知, 若 $f : (M,p) \to (N,q)$ 为 C^∞ 微分同胚芽, 则 $(\mathrm{d}f)_p$ 为同构. 特别, 当 $h : (M,p) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ 为 C^∞ 坐标卡芽因而是 C^∞ 微分同胚芽时, $(\mathrm{d}h)_p : T_pM \to T_0\mathbb{R}^m$ 是向量空间之间的同构, 从而研究 T_pM 只需研究 $T_0\mathbb{R}^m$.

引理 1.3.1　设 U 为 $\mathbb{R}^m$ 中包含原点的凸邻域, $r_1, \cdots, r_m$ 为坐标函数. 若 $\alpha : U \to \mathbb{R}$ 为 C^∞ 函数, 则存在 m 个 C^∞ 函数 $\alpha_i : U \to \mathbb{R}$, 使得

$$\alpha(r) = \alpha(0) + \sum_{i=1}^{n} r_i \alpha_i(r), \quad \alpha_i(0) = \frac{\partial \alpha}{\partial r_i}(0).$$

证明　由 U 的凸性知, 连接点 0 与点 $r = (r_1, \cdots, r_m) \in U$ 的直线段位于 U 中. 据微积分学中的牛顿–莱布尼兹公式, 有

$$\alpha(r) - \alpha(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \alpha(tr) \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{m} r_i \cdot \int_0^1 \frac{\partial \alpha}{\partial r_i}(tr) \mathrm{d}t.$$

令 $\alpha_i(r) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial \alpha}{\partial r_i}(tr)\mathrm{d}t$, 则 α_i 是 C^∞ 函数, $\alpha_i(0) = \dfrac{\partial \alpha}{\partial r_i}(0), i = 1, \cdots, m$, 并且

$$\alpha(r) = \alpha(0) + \sum_{i=1}^{m} r_i \alpha_i(r).$$

定理 1.3.1 令 ε_m 为 $\mathbb{R}^m$ 上的 C^∞ 函数在点 0 处的芽组成之环, 则 $\left.\dfrac{\partial}{\partial r_i}\right|_0$: $\varepsilon_m \to \mathbb{R}, \alpha \mapsto \dfrac{\partial \alpha}{\partial r_i}(0)$ $(i = 1, \cdots, m)$ 为实向量空间 $T_0\mathbb{R}^m$ 的一组基.

证明 易见 $\left.\dfrac{\partial}{\partial r_i}\right|_0$ $(i = 1, \cdots, m)$ 为 ε_m 的线性求导算子. 为证它们组成 $T_0\mathbb{R}^m$ 的基, 首先证明它们是线性无关的. 设

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \left.\frac{\partial}{\partial r_i}\right|_0 = 0, \quad \lambda_i \in \mathbb{R},$$

将它作用于坐标函数芽 r_j, 得

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \left.\frac{\partial r_j}{\partial r_i}\right|_0 = \lambda_j = 0, \quad j = 1, \cdots, m.$$

其次证明任意一个 $X \in T_0\mathbb{R}^m$ 均可由诸 $\left.\dfrac{\partial}{\partial r_i}\right|_0$ 线性表示. 设 $X(r_i) = \mu_i (i = 1, \cdots, m)$, 则

$$Y = X - \sum_{i=1}^m \mu_i \left.\frac{\partial}{\partial r_i}\right|_0$$

也是线性求导算子且 $Y(r_i) = 0$. 任取 $\alpha \in \varepsilon_m$, 据引理 1.3.1, 有

$$\alpha = \alpha(0) + \sum_{i=1}^m r_i \alpha_i, \quad \alpha_i \in \varepsilon_m,$$

因而

$$Y(\alpha) = Y(\alpha(0)) + \sum_{i=1}^m Y(r_i \alpha_i) = 0 + \sum_{i=1}^m Y(r_i)\alpha_i(0) + \sum_{i=1}^m r_i(0) Y(\alpha_i) = 0,$$

于是 $X = \displaystyle\sum_{i=1}^m \mu_i \left.\frac{\partial}{\partial r_i}\right|_0$.

由该定理立即导出 m 维 C^∞ 流形在任意点 $p \in M$ 处的切空间 T_pM 是一个 m 维实向量空间.

定义 1.3.6 设 (U, φ) 是 m 维 C^∞ 流形 M 的一个局部坐标卡, 坐标函数为 $x_1, \cdots, x_m$, 这里 $x_i = r_i \circ \varphi, i = 1, \cdots, m$. 又 $p \in U$. 对每一 $i = 1, \cdots, m$, 定义切向量 $\left.\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \in T_pM$ 如下: 任取 $\alpha \in \varepsilon(p)$, 令

$$\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right)(\alpha) = \left.\frac{\partial(\alpha \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i}\right|_{\varphi(p)},$$

参见图 1.5.

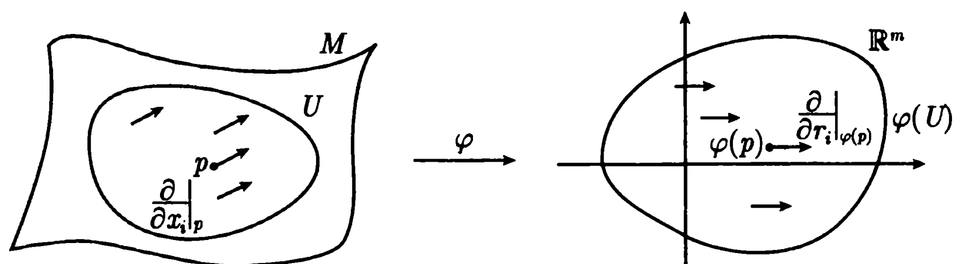


图 1.5

命题 1.3.2　(i) 设 M 是 m 维微分流形, $\{x_1,\cdots,x_m\}$ 是围绕点 $p\in M$ 的局部坐标系, 则 $\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p : i=1,\cdots,m\right\}$ 组成切空间 T_pM 的基. 并且若 $X\in T_pM$, 则

$$X=\sum_{i=1}^{m}X(x_i)\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p. \tag{2}$$

(ii) 设 (U,φ) 和 (U',φ') 为含点 $p\in M$ 的两个局部坐标卡, 坐标函数分别为 $x_1,\cdots,x_m$ 和 $x'_1,\cdots,x'_m$, 则

$$\left.\frac{\partial}{\partial x'_j}\right|_p=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial x_i}{\partial x'_j}\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p.$$

(iii) 设 M, N 为 C^∞ 流形, 维数分别为 m 和 n, $f:M\to N$ 为 C^∞ 映射. 若 $(U,\varphi;x_i)$ 和 $(V,\psi;y_j)$ 分别为含点 $p\in M$ 和点 $q=f(p)\in N$ 的局部坐标系, 则

$$(\mathrm{d}f)_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_p\right)=\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial(y_i\circ f)}{\partial x_j}\right|_p\cdot\left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_q.$$

矩阵 $Df=\left(\frac{\partial(y_i\circ f)}{\partial x_j}\right)$ 称为 f 的 Jacobi 矩阵.

证明　(i) 以点 p 为中心的局部坐标系记为 $\{U,\varphi;x_1,\cdots,x_m\}$, 此时 $\varphi(p)=0$. 任取 $\alpha\in\varepsilon(p)$, 由引理 1.3.1 知, $\tilde{\alpha}=\alpha\circ\varphi^{-1}$ 可表为

$$\tilde{\alpha}=\tilde{\alpha}(0)+\sum_{i=1}^{m}r_i\tilde{\alpha}_i,\quad \tilde{\alpha}_i\in\varepsilon_m,\quad \tilde{\alpha}_i(0)=\frac{\partial\tilde{\alpha}}{\partial r_i}(0),$$

因而

$$\alpha=\alpha(p)+\sum_{i=1}^{m}x_i\alpha_i,\quad \alpha_i\in\varepsilon(p),\quad \alpha_i(p)=\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}(p).$$

任取 $X\in T_pM$, 我们有

$$X(\alpha)=X\left(\alpha(p)+\sum_{i=1}^{m}x_i\alpha_i\right)=\sum_{i=1}^{m}(X(x_i)\cdot\alpha_i(p)+x_i(p)X(\alpha_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{m} X(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p (\alpha),$$

从而

$$X = \sum_{i=1}^{m} X(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p,$$

这说明 T_pM 中的每一成员均可用 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}\Big|_p \right\}$ 线性表示. 其次不难证明 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p : i = 1, \cdots, m \right\}$ 是线性无关的, 因此 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p : i = 1, \cdots, m \right\}$ 组成 T_pM 的基.

(ii) 设 $x_i = r_i \circ \varphi, x'_j = r'_j \circ \varphi', i, j = 1, \cdots, m$. 任取 $\alpha \in \varepsilon(p)$,

$$\frac{\partial}{\partial x'_j}\bigg|_P (\alpha) = \frac{\partial(\alpha \circ \varphi'^{-1})}{\partial r'_j}\bigg|_{\varphi'(p)} = \frac{\partial((\alpha \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi'^{-1}))}{\partial r'_j}\bigg|_{\varphi'(p)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(\alpha \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i}\bigg|_{\varphi(p)} \cdot \frac{\partial((r_i \circ \varphi) \circ \varphi'^{-1})}{\partial r'_j}\bigg|_{\varphi'(p)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial x'_j}(p) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p (\alpha),$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial x'_j}\bigg|_p = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p.$$

(iii) 留给读者练习.

上述诸概念 (包括切向量、切空间及切映射) 正如文献 [7] 所指出的, 它们是按照代数学家的观点来定义的, 优点是便于应用, 但颇为抽象. 为帮助读者直观理解这些概念的几何意义, 下面介绍几何学家的定义.

光滑流形 M 上的一条经过点 p 的**光滑曲线** w 指的是 C^∞ 映射 $w : (-\delta, \delta) \to M$ 并且 $w(0) = p$. w 也叫做 M 上经过点 p 的一条**光滑道路**. 令 W_p 为 M 上过点 p 的光滑道路芽所成之集,

$$W_p = \{w : (\mathbb{R}, 0) \to (M, p) \text{ 为 } C^\infty \text{ 映射芽}\}.$$

在 W_p 中引入等价关系 “$\sim$” 如下：设 $w, v \in W_p$, 则

$$w \sim v \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha \circ w)\bigg|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha \circ v)\bigg|_{t=0}, \quad \forall \alpha \in \varepsilon(p).$$

以 w 为代表的等价类 $[w]$ 叫做 M 在点 p 的一个**切向量**. 因此两条光滑曲线在点 p 处的芽定义相同的切向量当且仅当任意 C^∞ 函数在点 p 处沿这两条曲线的变化率相等 (图 1.6).

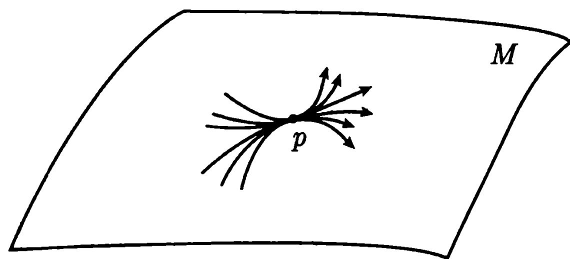


图 1.6

记 $W_p/\sim = T_p(M)_G$, 它是光滑流形 M 在点 p 处的切空间的几何学家定义. 下面证明: $T_p(M)_G \cong T_pM$. 为此构作映射 $T_p(M)_G \to T_pM$, 将 $[w] \in T_p(M)_G$ 对应于 $X_w \in T_pM$, 其中 X_w 定义为

$$X_w(\alpha) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha \circ w)(0), \quad \forall \alpha \in \varepsilon(p).$$

该映射显然是单射, 下面说明它还是满射. 选取局部坐标系 $(U, \varphi; x_i)$. 若 $X_w = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, 令 $w(t) = \varphi^{-1}(a_1 t, \cdots, a_m t)$ 便可. 由于 T_pM 具有 m 维实向量空间结构, 因而可赋予 $T_p(M)_G$ 以向量空间结构, 使得 $T_p(M)_G$ 与 T_pM 同构.

现在来看切映射. 设 $f: (M, p) \to (N, q)$ 为 C^∞ 映射芽, 则它诱导出映射

$$T_p(M)_G \to T_q(N)_G, \quad [w] \mapsto [f \circ w],$$

如图 1.7 所示.

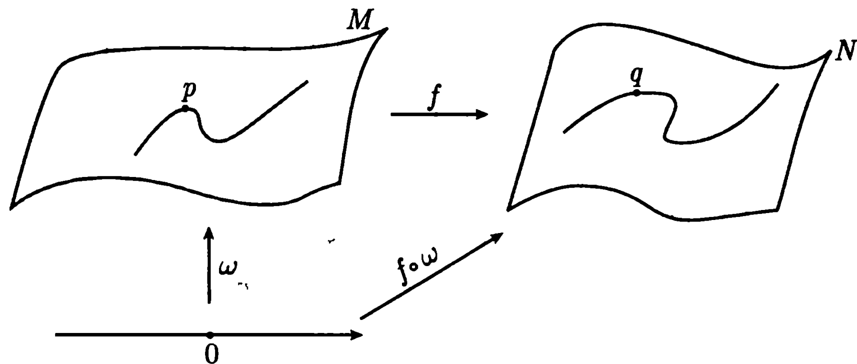


图 1.7

该映射可视为切映射, 因为它与前面所定义的切映射一致. 事实上,

$$X_{f\circ w}(\alpha) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha \circ f \circ w)(0) = X_w(\alpha \circ f) = (\mathrm{d}f)_p(X_w)(\alpha), \quad \forall \alpha \in \varepsilon(q).$$

1.3.2 余切空间与余切映射

考察光滑流形 M 上的光滑函数 $f: M \to \mathbb{R}$ 的微分. 对于 $X \in T_pM$, $(\mathrm{d}f)_p(X) \in T_{f(p)}\mathbb{R}$. 因为 $T_{f(p)}\mathbb{R}$ 是实 1 维的, 故 $(\mathrm{d}f)_p(X) = \lambda\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$ 对某一 $\lambda \in \mathbb{R}$, 其中 r 为 $\mathbb{R}$ 中的坐标函数. 为确定 λ, 只需计算 $(\mathrm{d}f)_p(X)$ 在坐标函数 r 上所取之值.

$$\lambda = \left(\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)(r) = (\mathrm{d}f)_p(X)(r) = X(r \circ f) = X(f).$$

因此 $(\mathrm{d}f)_p(X) = X(f)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$. 而 $T_{f(p)}\mathbb{R}$ 自然同构于 $\mathbb{R}$, 这可通过同构 $\lambda\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \mapsto \lambda$ 来实现. 将这两个空间等同, 则 $(\mathrm{d}f)_p : T_pM \to \mathbb{R}$ 是 T_pM 上的线性函数, 即 $(\mathrm{d}f)_p \in T_p^*M$, 这里 T_p^*M 表示切空间 T_pM 的对偶空间. T_p^*M 称为流形 M 在点 p 处的**余切空间**.

令 (U, φ) 为围绕点 $p \in M$ 的局部坐标卡, 则坐标函数 $x_i = r_i \circ \varphi$ $(i = 1, \cdots, m)$ 的微分 $(\mathrm{d}x_i)_p \in T_p^*M$ 且 $\{(\mathrm{d}x_i)_p : i = 1, \cdots, m\}$ 是对偶于 $\left\{\left.\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_p : i = 1, \cdots, m\right\}$ 的基 (为简便起见, 以下将下标 p 省去). 事实上, 我们有

$$\mathrm{d}x_j\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

而切向量 $X \in T_pM$ 可表示为

$$X = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad a_i = X(x_i), \quad i = 1, \cdots, m,$$

故

$$\mathrm{d}f(X) = X(f) = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i(X),$$

并且

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i.$$

当 $M = \mathbb{R}^m$ 时, 这就是多元函数的微分公式. 现将上述结果整理为

命题 1.3.3 设 M 为 m 维 C^∞ 流形, $\{x_1, \cdots, x_m\}$ 为围绕点 $p \in M$ 的局部坐标系, 则 $\{(\mathrm{d}x_i)_p : i = 1, \cdots, m\}$ 是余切空间 T_p^*M 的基, 且 $\dim T_p^*M = m$. 对于定义在点 p 的邻域上的 C^∞ 函数 f, $(\mathrm{d}f)_p \in T_p^*M$ 可表示为

$$(\mathrm{d}f)_p = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(\mathrm{d}x_i)_p.$$

C^∞ 流形 M 与 N 之间的 C^∞ 映射 $F: M \to N$ 在点 $p \in M$ 的微分 $\mathrm{d}F: T_pM \to T_{F(p)}N$ 是一个线性映射, 它的对偶映射

$$F^*: T^*_{F(p)}N \to T^*_pM$$

称为**余切映射**或**拉回映射**, 定义为

$$F^*(\omega)(X) = \omega(\mathrm{d}F(X)),$$

其中 $\omega \in T^*_{F(p)}N, X \in T_pM$.

特别地, 取 $\omega = \mathrm{d}f$, 其中 $f: N \to \mathbb{R}$ 为 C^∞ 函数, 则

$$F^*(\mathrm{d}f)(X) = \mathrm{d}f(\mathrm{d}F(X)) = \mathrm{d}(f \circ F)X, \quad X \in T_pM,$$

因而

$$F^*(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(f \circ F).$$

余切映射也有相应的链法则. 设 $F: M \to N, G: N \to L$ 均为 C^∞ 映射. 对于 $p \in M$, 记 $F(p) = q, G(q) = r$, 则

$$(G \circ F)^*_r = F^*_q \cdot G^*_r.$$

切映射 $\mathrm{d}F$ 与余切映射 F^* 有如下关系: 若 $\mathrm{d}F$ 是单射, 则 F^* 是满射; 若 $\mathrm{d}F$ 是满射, 则 F^* 为单射.

下面讨论余切映射在局部坐标系下的表示. 设 $F: M \to N$ 为 C^∞ 映射, $\{x_1, \cdots, x_m\}$ 和 $\{y_1, \cdots, y_n\}$ 分别为围绕点 $p \in M$ 和点 $q = F(p) \in N$ 的局部坐标系. F 的局部坐标表示设为

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, \cdots, x_m), \\ \cdots\cdots \\ y_n = y_n(x_1, \cdots, x_m), \end{cases}$$

则对于 $X \in T_pM$,

$$\mathrm{d}F(X) = \sum_{j=1}^{n} X(y_j \circ F) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_q,$$

其 Jacobi 矩阵

$$DF = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

今设 $\omega = \sum_{j=1}^{n} v_j \mathrm{d}y_j \in T_q^*N$, $F^*(\omega) = \sum_{i=1}^{m} u_i \mathrm{d}x_i \in T_p^*M$, 则

$$\begin{aligned}F^*(\omega) = F^*\left(\sum_{j=1}^{n} v_j \mathrm{d}y_j\right) &= \sum_{j=1}^{n} v_j F^*(\mathrm{d}y_j) = \sum_{j=1}^{n} v_j \mathrm{d}(y_j \circ F)\\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_i}(y_j \circ F)\mathrm{d}x_i.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \\ \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_1}{\partial x_m} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \\ \\ v_n \end{pmatrix},$$

其中变换矩阵简记为 ΔF, 易见 DF 与 ΔF 互为转置矩阵, 并且上面的结果可以写成

$$F^*(\omega) = \sum_{i=1}^{m} \omega\left(\mathrm{d}F\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right)\mathrm{d}x_i.$$

1.4 局部分析中的几个基础结果

1.4.1 反函数定理与隐函数定理

给定光滑流形之间的光滑映射 $F: M \to N$, 则对任意点 $p \in M$, 有切映射 $(\mathrm{d}F)_p : T_pM \to T_{F(p)}N$. 我们感兴趣的是: 切映射 $(\mathrm{d}F)_p$ 的性质是否可决定映射 F 在点 p 的邻域内的性质? 一个经典的结果是微积分学中熟知的反函数定理.

定理 1.4.1 设 U 为 $\mathbb{R}^m$ 中开集, $F = (F_1, \cdots, F_m) : U \to \mathbb{R}^m$ 为 C^∞ 映射, 其中 $F_i : U \to \mathbb{R}$ 为 F 的第 i 个分量函数, $i = 1, \cdots, m$. 如果在点 $x_0 \in U$ 处, 映射 F 的 Jacobi 行列式

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)\bigg|_{x_0} \neq 0, \tag{1}$$

则存在点 x_0 在 $\mathbb{R}^m$ 中的开邻域 $V \subset U$, 使得 $F|_V : V \to F(V)$ 为双射, 其中 $V' = F(V)$ 为点 $F(x_0)$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中的开邻域, 并且 $(F|_V)^{-1} : V' \to V$ 为光滑映射.

条件 (1) 说明线性映射

$$(\mathrm{d}F)_{x_0} : T_{x_0}U \to T_{F(x_0)}\mathbb{R}^m$$

是同构, 因此反函数定理告诉我们: 如果 F 在某点的切映射是同构, 则 F 是从该点的一个开邻域到其像点的一个开邻域上的微分同胚. 本定理的一个简洁证明请见文献 [3]. 利用局部坐标系可将上述定理推广到流形上去.

定理 1.4.2 (反函数定理)　设 M, N 为光滑流形, $F: M \to N$ 为光滑映射. 如果 F 在点 $p \in M$ 微分 $(\mathrm{d}F)_p: T_pM \to T_{F(p)}N$ 是同构, 则存在点 p 在 M 中的开邻域 W, 使得 $F|_W: W \to F(W)$ 是微分同胚.

证明　由线性映射 $(\mathrm{d}F)_p$ 为同构知, 流形 M 和 N 具有相同的维数, 设为 m. 选取围绕点 p 和点 $q = F(p) \in N$ 的坐标卡 (U, φ) 和 (V, ψ), 使得 $F(U) \subset V$. F 在点 p 邻近的局部表示 $\tilde{F} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \psi(V)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中开集之间的光滑映射, 并且 $\tilde{F}$ 在点 $\varphi(p)$ 的 Jacobi 行列式不为零. 据定理 1.4.1, 存在点 $\varphi(p)$ 的开邻域 $\tilde{U} \subset \varphi(U)$, 使得 $\tilde{F}\big|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \to \tilde{F}(\tilde{U}) \subset \psi(V)$ 是微分同胚. 令 $W = \varphi^{-1}(\tilde{U})$, 则 $F|_W = \psi^{-1} \circ \tilde{F} \circ \varphi|_W: W \to F(W)$ 是所要求的微分同胚 (见图 1.8).

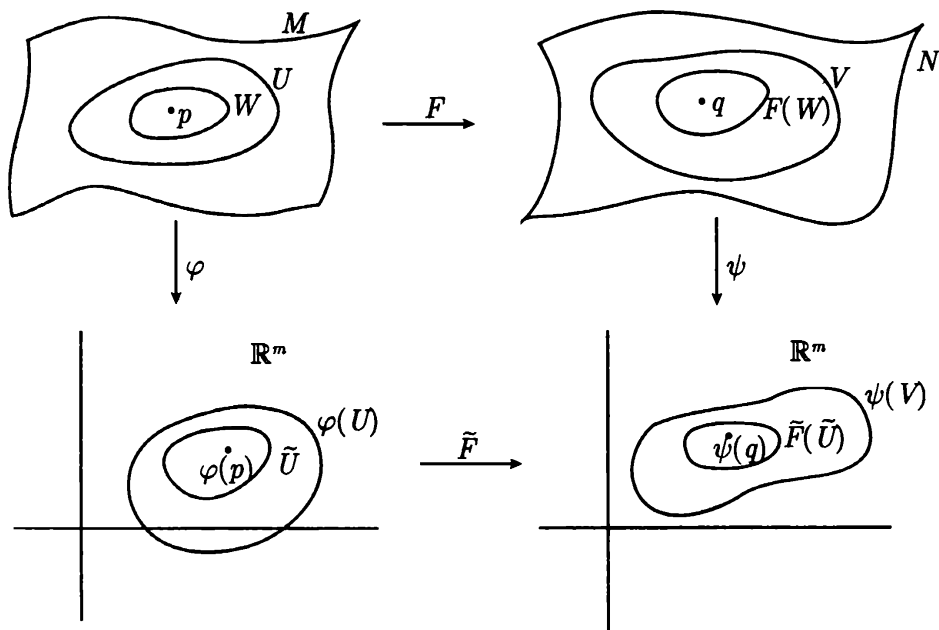


图 1.8

用芽的语言来陈述, 反函数定理可表述为

定理 1.4.2′　一个光滑映射芽是微分同胚芽当且仅当它的微分是一个同构.

从反函数定理可推得隐函数定理. 首先回忆经典隐函数定理的陈述.

定理 1.4.3　设 U 是 $\mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$ 中的开集, $f: U \to \mathbb{R}^n$ 是 C^∞ 映射. 将 $\mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$ 上点的坐标记为 $(r_1, \cdots, r_{m-n}, s_1, \cdots, s_n)$, 简记为 (r, s). 假设在点 $(r_0, s_0) \in U$ 处, $f(r_0, s_0) = 0$, 并且矩阵

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial s_j}(r_0, s_0)\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$$

是非退化的, 那么存在 r_0 在 $\mathbb{R}^{m-n}$ 中的一个开邻域 V 和 s_0 在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开

邻域 W, 使得 $V \times W \subset U$, 并且存在一个 C^∞ 映射 $g: V \to W$ 使得对于每个 $(r,s) \in V \times W$, $f(r,s) = 0$ 当且仅当 $s = g(r)$.

现对流形来证明下面的隐函数定理, 而经典的隐函数定理则是它的一种局部形式.

定理 1.4.4 设 M, N 分别是维数为 m 和 n 的光滑流形, $m > n$. 假设 $f: M \to N$ 为 C^∞ 映射. 对 $q_0 \in f(M)$, 记

$$M_0 = f^{-1}(q_0) = \{p \in M | f(p) = q_0\}.$$

假定对每一 $p \in M_0, (\mathrm{d}f)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ 皆为满射, 那么 M_0 是 M 的一个维数为 $m-n$ 的正则子流形.

证明 取 $p_0 \in M_0$, 选取 M 的一个以点 p_0 为中心的局部坐标卡 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_m)$ (因而 $\varphi(p_0) = 0$) 和 N 的一个以点 q_0 为中心的局部坐标卡 $(V, \psi; y_1, \cdots, y_n)$, 满足 $f(U) \subset V$. 据假设条件 $(\mathrm{d}f)_{p_0}$ 是满射, 所以 $n \times m$ 矩阵

$$\left(\frac{\partial(y_i \circ f)}{\partial x_j}(p_0)\right)$$

的秩为 n. 不妨假定这个矩阵的最后 n 列是线性无关的 (否则将 U 上的坐标函数重新编号), 因而该矩阵具有下列形式

$$(*|J),$$

其中 J 是一个非退化的 $n \times n$ 矩阵. 令 $h: U \to \mathbb{R}^{m-n} \times V$ 定义为

$$h(p) = (x_1(p), \cdots, x_{m-n}(p), f(p)), p \in U,$$

则 $(\mathrm{d}h)_{p_0}$ 有矩阵

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ * & J \end{pmatrix},$$

其中 I 是 $(m-n) \times (m-n)$ 单位矩阵, 从而 $(\mathrm{d}h)_{p_0}$ 是一个同构. 由反函数定理, 存在 p_0 在 M 中的一个开邻域 $U_0 (\subset U)$ 使得 $h|_{U_0} : U_0 \to h(U_0)$ 是一个微分同胚. 我们可以假定 $\mathbb{R}^{m-n} \times V$ 中的开集 $h(U_0)$ 形如 $W_0 \times V_0$, 其中 $0 \in W_0, q_0 \in V_0$, 因为这种开集组成 $\mathbb{R}^{m-n} \times V$ 的一个拓扑基 (若不然, 由 $W_0 \times V_0 \subset h(U_0)$, 取 $h^{-1}(W_0 \times V_0)$ 代替 U_0 即可). 再令

$$h_1 : W_0 \times V_0 \to W_0 \times \psi(V_0), (w, v) \mapsto (w, \psi(v)),$$

显然 h_1 是微分同胚, 于是微分同胚 $\tilde{h} = h_1 \circ h|_{U_0} : U_0 \to W_0 \times \psi(V_0) \subset \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$ 使得

$$\tilde{h}(U_0 \bigcap M_0) = h_1(W_0 \times \{q_0\}) = W_0 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{m-n} \times \{0\}.$$

取 $(U_0, \tilde{h})$ 作为围绕点 p_0 的局部坐标卡, 则

$$\tilde{h}(U_0 \bigcap M_0) = \tilde{h}(U_0) \bigcap (\mathbb{R}^{m-n} \times \{0\}).$$

由于 $p_0 \in M_0$ 是任取的, 依定义 1.1.4, M_0 是 M 的 $(m-n)$ 维正则子流形.

本定理提供了证明流形的某些子集是子流形的一种有效方法.

例 1　n 维球面 S^n 曾在 1.1 节例 2 中讨论过, 现利用定理 1.4.4 证明它是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 n 维正则子流形. 设 $f: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ 定义为 $f(r_1, \cdots, r_{n+1}) = \sum\limits_{i=1}^{n+1} r_i^2$, 则 $S^n = f^{-1}(1)$, 我们只需验证在 $f^{-1}(1)$ 的每个点处 $\mathrm{d}f \neq 0$. 因 $\mathrm{d}f = 2\sum\limits_{i=1}^{n+1} r_i \mathrm{d}r_i$, 而 $\{\mathrm{d}r_1, \cdots, \mathrm{d}r_{n+1}\}$ 线性无关, 故 $\mathrm{d}f \neq 0$ 除非对所有 i, 有 $r_i = 0$. 特别在 $f^{-1}(1)$ 上, $\mathrm{d}f \neq 0$.

例 2　将 $n \times n$ 实对称矩阵构成的空间记为 S, 它是一个流形, 因为它可以自然地等同于 $\mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$. 定义 $f: GL(n, \mathbb{R}) \to S$ 为 $f(\sigma) = \sigma\sigma^t$, 其中对每个 $\sigma \in GL(n, \mathbb{R}), \sigma^t$ 表 σ 的转置. 注意 f 是光滑的, 因为 $f(\sigma)$ 的每个元素是 σ 的元素的多项式. 令 $O(n) = f^{-1}(e)$, 其中 e 表示 $n \times n$ 单位矩阵, 则 $O(n)$ 作为 $GL(n, \mathbb{R})$ 的子群称为**正交群**. 现在证明 $O(n)$ 是 $GL(n, \mathbb{R})$ 的正则子流形, 维数是 $\dfrac{1}{2}n(n-1)$. 为此需证明: 对于每个 $\sigma \in O(n), (\mathrm{d}f)_\sigma$ 是满射. 下面说明只需对 $e \in O(n)$ 证明 $(\mathrm{d}f)_e$ 是满射就足够了.

设 $\sigma \in O(n)$, 定义 $R_\sigma: GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$ 为 $R_\sigma(\tau) = \tau\sigma$(矩阵乘法). 显然 R_σ 是光滑映射, 并且它的逆映射 $(R_\sigma)^{-1} = R_{\sigma^{-1}}$ 也是光滑映射, 因此 R_σ 是 $GL(n, \mathbb{R})$ 上的微分同胚, 而且

$$f = f \circ R_\sigma, \quad 对所有\ \sigma \in O(n)$$

皆成立. 事实上, 对任意 $\tau \in GL(n, \mathbb{R})$,

$$f \circ R_\sigma(\tau) = f(\tau\sigma) = (\tau\sigma)(\tau\sigma)^t = \tau\sigma\sigma^t\tau^t = \tau e \tau^t = \tau\tau^t = f(\tau).$$

从而 $(\mathrm{d}f)_\sigma = \mathrm{d}(f \circ R_{\sigma^{-1}})|_\sigma = \mathrm{d}f|_{R_{\sigma^{-1}}(\sigma)} \circ \mathrm{d}R_{\sigma^{-1}}|_\sigma = \mathrm{d}f|_e \circ \mathrm{d}R_{\sigma^{-1}}|_\sigma$, $(\mathrm{d}f)_\sigma$ 作为两个满射的复合自然是满射, 余下证明 $(\mathrm{d}f)_e$ 是满射. 记 $\mathbb{R}^{n^2}$ 上的坐标函数为 $r_{ij}, i, j = 1, \cdots, n$. 由于

$$(r_{ij} \circ f)(\sigma) = \sum_{h=1}^{n} r_{ih}(\sigma) r_{jh}(\sigma), \quad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n,$$

因而 $(\mathrm{d}f)_\sigma$ 的矩阵中的元素是

$$\frac{\partial}{\partial r_{kl}}(r_{ij}\circ f)\bigg|_{\sigma}=\begin{cases} r_{jl}(\sigma), & \text{当 } k=i\neq j,\\ r_{il}(\sigma), & \text{当 } k=j\neq i,\\ 2r_{il}(\sigma), & \text{当 } k=j=i,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $1\leqslant k,l\leqslant n$, 且 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$. 特别, $(\mathrm{d}f)_e$ 的矩阵中的元素是

$$\frac{\partial}{\partial r_{kl}}(r_{ij}\circ f)\bigg|_{e}=\begin{cases} 1, & \text{当 } (k,l)=(i,j), i\neq j;\\ 1, & \text{当 } (k,l)=(j,i), i\neq j;\\ 2, & \text{当 } (k,l)=(i,j), i=j;\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中 $1\leqslant k,l\leqslant n, 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$, 因此可导出 $(\mathrm{d}f)_e$ 的秩为 $\frac{1}{2}n(n+1)$, 这表明 $(\mathrm{d}f)_e$ 为满射. 综上所述, 我们证明了 $O(n)$ 是 $GL(n,\mathbb{R})$ 的正则子流形, 其维数等于 $n^2-\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}n(n-1)$.

1.4.2 秩定理

定义 1.4.1 光滑映射 $F:M\to N$ 在点 $p\in M$ 的**秩** (或说芽 $\tilde{F}:(M,p)\to N$ 的秩) 定义为微分 $(\mathrm{d}F)_p:T_pM\to T_{F(p)}N$ 的秩, 记为 Rank_pF.

选取 M 和 N 的局部坐标卡 (U,φ) 和 (V,ψ), 使得 $p\in U, F(p)\in V$ 且 $F(U)\subset V$. 将局部表示

$$\tilde{F}=\psi\circ F\circ\varphi^{-1}:\varphi(U)\to\psi(V)$$

在点 $\varphi(p)$ 的微分 (即 Jacobi 矩阵) 的秩记为 $\mathrm{Rank}(D\tilde{F})_{\varphi(p)}$, 不难看出

$$\mathrm{Rank}_pF=\mathrm{Rank}(D\tilde{F})_{\varphi(p)}.$$

由此可推出：当 $\mathrm{Rank}_pF=r$ 时, 必存在点 p 的邻域 W, 使得对所有 $w\in W$, $\mathrm{Rank}_wF\geqslant r$, 这说明光滑映射的秩是下半连续函数. 特别, 若 F 在点 p 的某一邻域内的秩为常数 r, 我们称芽 $\tilde{F}:(M,p)\to(N,F(p))$ **具常秩** r.

定理 1.4.5 设 $F:(M,p)\to(N,q)$ 是具有常秩 r 的光滑映射芽, 则存在 C^∞ 微分同胚芽 $\varphi:(M,p)\to(\mathbb{R}^m,0)$ 和 $\psi:(N,q)\to(\mathbb{R}^n,0)$, 使得芽

$$\psi\circ F\circ\varphi^{-1}:(\mathbb{R}^m,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$$

可表示为

$$(x_1,\cdots,x_m)\mapsto(x_1,\cdots,x_r,\underbrace{0,\cdots,0}_{(n-r)\text{个}}).$$

证明 依上面所述, 不妨直接假设 $F:(\mathbb{R}^m,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$. 选取 F 的一个代表 $\tilde{F}$, 它具有常秩 r, 因而 $D\tilde{F}$ 有一个 $r\times r$ 子矩阵在原点是非退化的. 对矩阵作初等变换, 相当于在 $\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{R}^n$ 上分别作非退化线性坐标变换 (因而是局部微分同胚), 可以假定子矩阵

$$\left(\frac{\partial\tilde{F}_i}{\partial x_j}(0)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant r}$$

是非退化的, 因此在原点的某一邻域 U 内也是非退化的. 定义 $\tilde{\varphi}:U\to\mathbb{R}^m$ 为

$$\tilde{\varphi}(x_1,\cdots,x_m)=(\tilde{F}_1(x),\cdots,\tilde{F}_r(x),x_{r+1},\cdots,x_m),$$

这里 $\tilde{F}_1,\cdots,\tilde{F}_r$ 为 $\tilde{F}$ 的前 r 个分量. 由

$$D\tilde{\varphi}=\begin{bmatrix}\multicolumn{2}{c}{\dfrac{\partial\tilde{F}_i}{\partial x_j}}\\ \hdashline 0 & I_{m-r}\end{bmatrix}\begin{matrix}\}r\\ \}m-r\end{matrix}\qquad(\text{列宽 } \underbrace{\quad}_{r}\ \underbrace{\quad}_{m-r})$$

知, 在 U 上,

$$\det(D\tilde{\varphi})=\det\left(\frac{\partial\tilde{F}_i}{\partial x_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant r}\neq 0,$$

说明以 $\tilde{\varphi}$ 为代表的映射芽 $\varphi:(\mathbb{R}^m,0)\to(\mathbb{R}^m,0)$ 是一个微分同胚芽, 且有下列图表

$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^m,0) & \xrightarrow{F} & (\mathbb{R}^n,0)\\ & \varphi\searrow\quad\nearrow G=F\circ\varphi^{-1} & \\ & (\mathbb{R}^m,0) & \end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}(x_1,\cdots,x_m) & \longmapsto & (F_1(x),\cdots,F_n(x))\\ & \searrow\quad\nearrow & \\ & (F_1(x),\cdots,F_r(x),x_{r+1},\cdots,x_m) & \\ & \| & \\ & (z_1,\cdots,z_r,z_{r+1},\cdots,z_m) & \end{array}$$

因而 $G=F\circ\varphi^{-1}$ 可表示为 $z=(z_1,\cdots,z_m)\overset{\tilde{G}}{\mapsto}(z_1,\cdots,z_r,\tilde{G}_{r+1}(z),\cdots,\tilde{G}_n(z))$, 并且 $\tilde{G}$ 的 Jacobi 矩阵

$$D\tilde{G}=\begin{bmatrix}I_r & 0\\ \hdashline * & A(z)\end{bmatrix}\begin{matrix}\}r\\ \}n-r\end{matrix}\qquad(\text{列宽 } \underbrace{\quad}_{r}\ \underbrace{\quad}_{m-r})$$

其中

$$A(z)=\left(\frac{\partial\tilde{G}_i}{\partial z_j}\right)_{\substack{r+1\leqslant i\leqslant n\\ r+1\leqslant j\leqslant m}}.$$

因为在 $0\in\mathbb{R}^m$ 的邻域 $\tilde{\varphi}(U)$ 内, $\mathrm{Rank}(\tilde{G})=\mathrm{Rank}(D\tilde{G})=r$, 所以在该邻域内, 矩阵

$A(z)$ 必为零矩阵, 于是

$$\frac{\partial \tilde{G}_i}{\partial z_j}=0, \quad r+1\leqslant i\leqslant n,\ r+1\leqslant j\leqslant m. \tag{2}$$

在值域 $\mathbb{R}^n$ 中施行局部坐标变换, 令 $\psi:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$ 由下式给出

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1}-\tilde{G}_{r+1}(y_1,\cdots,y_r,0,\cdots,0) \\ \vdots \\ y_n-\tilde{G}_n(y_1,\cdots,y_r,0,\cdots,0) \end{bmatrix}.$$

$$D\psi=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ * & I_{n-r} \end{bmatrix},$$

说明 ψ 是微分同胚芽, 并且 $\psi\circ G$ 可表示为下列映射的复合

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \\ z_{r+1} \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \\ \tilde{G}_{r+1}(z) \\ \vdots \\ \tilde{G}_n(z) \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \\ \tilde{G}_{r+1}(z)-\tilde{G}_{r+1}(z_1,\cdots,z_r,0,\cdots,0) \\ \vdots \\ \tilde{G}_n(z)-\tilde{G}_n(z_1,\cdots,z_r,0,\cdots,0) \end{bmatrix}.$$

由 (2) 式知, 这一复合的后 $(n-r)$ 个分量

$$\tilde{G}_{r+j}(z_1,\cdots,z_m)-\tilde{G}_{r+j}(z_1,\cdots,z_r,0,\cdots,0) \quad (1\leqslant j\leqslant n-r)$$

在一个 m 维方体 $|z_j|<\varepsilon$ 上为 0, 于是 $\psi\circ G=\psi\circ F\circ\varphi^{-1}$ 可表示为

$$(z_1,\cdots,z_m)\mapsto(z_1,\cdots,z_r,\underbrace{0,\cdots,0}_{(n-r)\text{个}}).$$

定义 1.4.2 设 M,N 为光滑流形, $F:M\to N$ 为光滑映射.

(i) 如果在 M 的每一点 p, 有 $\mathrm{Rank}_pF=\dim M$, 那么 F 称为**浸入映射**.

(ii) 如果在 M 的每一点 p, 有 $\mathrm{Rank}_pF=\dim N$, 那么 F 称为**淹没映射**.

无论是上述哪种情形, Rank F 均达到极大. 依照定理 1.4.5 , 选取适当的局部坐标系, 浸入芽具有下列形式

$$(x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_1, \cdots, x_m, \underbrace{0, \cdots, 0}_{(n-m)\text{个}}),$$

而淹没芽则可表示为

$$(x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_1, \cdots, x_n).$$

从局部来看, 淹没相当于投射, 浸入则表示为包含映射.

1.4.3 Morse 引理

Morse 首先注意到微分流形上的光滑函数可显示流形的拓扑性质, 主要集中在光滑函数的临界点附近. 对微分流形上光滑函数的临界点的研究是微分流形的重要课题, 属于 Morse 理论的一个重要组成部分, 见文献 [8].

定义 1.4.3　设 M 为 m 维 C^∞ 流形, $f: M \to \mathbb{R}$ 为 C^∞ 函数.$p \in M$ 叫做 f 的一个**临界点**, 如果 $\mathrm{Rank}_p f = 0$(因而 $(\mathrm{df})_p = 0$). 选取包含点 p 的局部坐标卡 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_m)$, 则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right|_p = 0, i = 1, \cdots, m$. 如果有某个 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right|_p \neq 0$, 那么 p 称为 f 的一个**正则点**.

讨论函数在一点附近的局部性质, 自然使用芽的语言来表述. 将函数 f 在点 $p \in M$ 处的芽 $(M,p) \to \mathbb{R}$ 仍记为 f, 将映射 $\varphi: U \to \mathbb{R}^m$ 在点 p 处的芽记为 $\varphi: (M,p) \to \mathbb{R}^m$, 不妨设 $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$, 于是 $\alpha = f \circ \varphi^{-1}: (\mathbb{R}^m, 0) \to \mathbb{R}$ 看作是将芽 f 拉回到 $\mathbb{R}^m$ 上的一个自然表示, 注意 φ 是一个微分同胚芽.

命题 1.4.1　若 $\alpha \in \mu_m = \{\alpha \in \varepsilon_m \,|\alpha(0) = 0\}$ 且 $\alpha \notin \mu_m^2$, 则存在微分同胚芽 $\varphi: (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ 使得 $\alpha \circ \varphi^{-1}$ 为一个坐标函数芽.

证明　记 $\mathbb{R}^m$ 上的坐标为 $(r_1, \cdots, r_m)$. $\alpha \in \mu_m$ 表示 $\alpha: (\mathbb{R}^m, 0) \to \mathbb{R}$ 满足 $\alpha(0) = 0$, $\alpha \notin \mu_m^2$ 说明 α 至少有一个偏导数在原点的值不为 0, 不妨设 $\dfrac{\partial \alpha}{\partial r_1}(0) \neq 0$. 定义 $\varphi: (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ 如下:

$$\begin{aligned} s_1 &= \alpha(r_1, \cdots, r_m), \\ s_i &= r_i, \quad i = 2, \cdots, m. \end{aligned}$$

$$D\varphi(0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \alpha}{\partial r_1}(0) & * \\ 0 & I_{m-1} \end{pmatrix},$$

其中 I_{m-1} 是 $(m-1) \times (m-1)$ 单位矩阵, 故 $\det D\varphi(0) = \dfrac{\partial \alpha}{\partial r_1}(0) \neq 0, \varphi$ 是一个微

分同胚芽. 并且 $(\alpha\circ\varphi^{-1})(s_1,\dots s_m)=s_1$.

本命题指出, 将微分同胚 φ^{-1} 从右边与 α 复合, 意味着对 α 的源空间 $\mathbb{R}^m$ 施行一个 C^∞ 局部坐标变换, 其结果 $\alpha\circ\varphi^{-1}$ 是一个坐标函数芽. 按照 Mather 的说法, α 右等价于一个坐标函数芽. 因此对于流形上的光滑函数, 在正则点附近可用一坐标函数作为局部表示. 从拓扑的观点来考察流形上的光滑函数, 感兴趣的则是在临界点附近.

定义 1.4.4 设 $f:M\to\mathbb{R}$ 为 m 维光滑流形 M 上的 C^∞ 函数, $p\in M$ 是 f 的一个临界点, (U,φ) 是以点 p 为中心的局部坐标卡. 不失一般性, 假设 $f(p)=0$, 于是对光滑函数芽 $f:(M,p)\to(\mathbb{R},0)$ 和坐标卡芽 $\varphi:(M,p)\to(\mathbb{R}^m,0)$, 令 $\alpha=f\circ\varphi^{-1}:(\mathbb{R}^m,0)\to\mathbb{R}$. 显然 $\alpha\in\mu_m^2$. 若 α 在 μ_m/μ_m^3 中的投影是一个非退化的二次型, 则称 f 为**Morse 芽**, 点 $p\in M$ 为 f 的**非退化临界点**.

我们把 α 在 μ_m/μ_m^3 中的投影称为 α 的 **2-导网**, 记为 $j^2\alpha$. 由 Taylor 公式知, $j^2\alpha$ 可表示为 α 在 $0\in\mathbb{R}^m$ 处的 2 阶 Taylor 多项式. 由于 $0\in\mathbb{R}^m$ 是 α 的临界点, 因此 $j^2\alpha$ 不含 $r_1,\cdots,r_m$ 的一次项, $j^2\alpha$ 是 $r_1,\cdots,r_m$ 的二次齐次多项式, 其系数矩阵为

$$A=\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial r_i\partial r_j}(0)\right)_{i,j=1,\cdots,m}.$$

$j^2\alpha$ 非退化意指 $m\times m$ 实对称矩阵 A 满秩或 A 有 m 个非零实特征根. 我们把矩阵 A 的负特征根的个数称为 f 在点 p 的**指标**, 记为 $\mathrm{ind}_p f$.

需要说明上述定义与 α 的选取或者说与局部坐标卡的选取无关. 设 (V,ψ) 是以点 p 为中心的另一坐标卡, 因而对坐标卡芽 $\psi:(M,p)\to(\mathbb{R}^m,0)$, 令 $\beta=f\circ\psi^{-1}$, 则 $\alpha=\beta\circ(\psi\circ\varphi^{-1})$. 记 $\varPhi=\psi\circ\varphi^{-1}:(\mathbb{R}^m,0)\to(\mathbb{R}^m,0)$, 显然它是微分同胚芽. 根据 Taylor 公式,

$$\varPhi=j^2\varPhi+\delta,\quad \delta=(\delta_1,\cdots,\delta_m),\quad \delta_i\in\mu_m^3,\quad i=1,\cdots,m,$$

$$\beta=j^2\beta+\eta,\quad \eta\in\mu_m^3,$$

所以

$$\alpha=\beta\circ\varPhi=j^2\beta\circ j^2\varPhi+\varsigma,\quad \varsigma\in\mu_m^3,$$

$$j^2\alpha=j^2\beta\cdot j^2\varPhi,$$

其中 $j^2\beta\cdot j^2\varPhi$ 表示 $j^2\beta\circ j^2\varPhi$ 再舍去次数大于 2 的所有项. 它说明 $j^2\beta$ 作为 $s_1,\cdots,s_m$ 的二次齐次多项式通过从 $\{r_1,\cdots,r_m\}$ 到 $\{s_1,\cdots,s_m\}$ 的非退化线性变换而变为 $j^2\alpha$. 记 $j^2\beta$ 的系数矩阵为 $B=\left(\dfrac{\partial^2\beta}{\partial s_i\partial s_j}(0)\right)$, 简记 $D\varPhi(0)=C$, 则 C

是 $GL(m,\mathbb{R})$ 中的一员, 并且 $A = C^{\mathrm{T}}BC$, 因此矩阵 A 和 B 具有相同的秩, 从而 $j^2\alpha$ 非退化当且仅当 $j^2\beta$ 非退化, 并且 A 与 B 的负特征根的个数相同.

定理 1.4.6 (Morse 引理) 若 $\alpha \in \mu_m^2$ 是指标为 $\lambda(0 \leqslant \lambda \leqslant m)$ 的 Morse 芽, 则存在微分同胚芽 $\varphi: (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$, 使得芽 $\alpha \circ \varphi$ 可表示为

$$(r_1, \cdots, r_m) \mapsto -r_1^2 - \cdots - r_\lambda^2 + r_{\lambda+1}^2 + \cdots + r_m^2. \tag{3}$$

证明 两次应用引理 1.3.1, 将 α 表为

$$\alpha(r_1, \cdots, r_m) = \sum_{i,j=1}^{m} r_i r_j h_{ij}(r), \quad h_{ij} \in \varepsilon_m. \tag{4}$$

可以假定 $h_{ij} = h_{ji}$, 因为 α 可写为

$$\alpha = \sum_{i,j} r_i r_j \tilde{h}_{ij}, \quad \tilde{h}_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji}),$$

又 $(\tilde{h}_{ij}(0)) = \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial r_i \partial r_j}(0)\right)$ 是非退化的. 我们要证明存在 $\mathbb{R}^m$ 上保原点的局部微分同胚 φ, 使得 $\alpha \circ \varphi$ 可表为 (3) 式, 为此参照线性代数中化二次型为标准型的对角化证明方法.

使用归纳法, 假设在原点的某一邻域 U_1 内, 存在坐标函数 $u_1, \cdots, u_m$, 使得

$$\alpha = \pm u_1^2 \pm \cdots \pm u_{k-1}^2 + \sum_{i,j \geqslant k} u_i u_j H_{ij}(u_1, \cdots, u_m),$$

其中 $(H_{ij}(u))$ 为对称矩阵. 当 $k = 1$ 时就是上面的 (4) 式. 因为 α 为 Morse 芽, 所以 $H_{ij}(0)(i, j \geqslant k)$ 不全为 0. 对后 $m - k + 1$ 个坐标施行非退化线性变换 (如有必要的话), 可假定 $H_{kk}(0) \neq 0$. 令

$$g(u_1, \cdots, u_m) = \sqrt{|H_{kk}(u_1, \cdots, u_m)|},$$

它在原点的某一较小邻域 $U_2 \subset U_1$ 中是一个非零的 C^∞ 函数. 现引入新坐标 $v_1, \cdots, v_m$, 令

$$v_i = u_i, \quad i \neq k,$$

$$v_k(u_1, \cdots, u_m) = g(u)\left[u_k + \sum_{i \geqslant k+1} u_i H_{ik}(u)/H_{kk}(u)\right],$$

据反函数定理, 在原点的某一更小的邻域 $U_3 \subset U_2$ 中, $v_1, \cdots, v_m$ 可取为局部坐标, 并且

$$\alpha = \sum_{i \leqslant k} \pm v_i^2 + \sum_{i,j > k} v_i v_j \tilde{H}_{ij}(v_1, \cdots, v_m),$$

这就完成了归纳证明.

表达式 (3) 中负平方项的项数则由 α 在非退化临界点 $0 \in \mathbb{R}^m$ 的指标 λ 所决定, 细节留给读者补述. 由该定理可推出 Morse 引理的另一形式.

定理 1.4.6′ 设 $f: M \to \mathbb{R}$ 为 m 维光滑流形 M 上的 C^∞ 函数, $p \in M$ 是 f 的一个指标为 λ 的非退化临界点, 则存在一个中心在点 p 的局部坐标卡 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_m)$, 使得对每一 $q \in U$, 有

$$f(q) = f(p) - x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_m^2.$$

推论 1.4.1 非退化临界点是孤立临界点.

例 3 设 M 为紧致光滑流形, $f: M \to \mathbb{R}$ 为 C^∞ 函数. 如果 f 仅有非退化临界点, 则它们的数目是有限的.

函数在退化临界点附近, 情况复杂得多. 下面给出几个退化临界点的例子 (图 1.9):

(1) $f_1(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2} \sin \dfrac{1}{x^2}$, 原点是非孤立的退化临界点;

(2) $f_2(x, y) = x^2$, 退化临界点集为 y 轴;

(3) $f_3(x, y) = x^2 y^2$, 退化临界点集由 x 轴与 y 轴的并组成;

(4) $f_4(x, y) = x(x^2 - 3y^2)$, 原点为退化临界点, 其图形叫做猴鞍面.

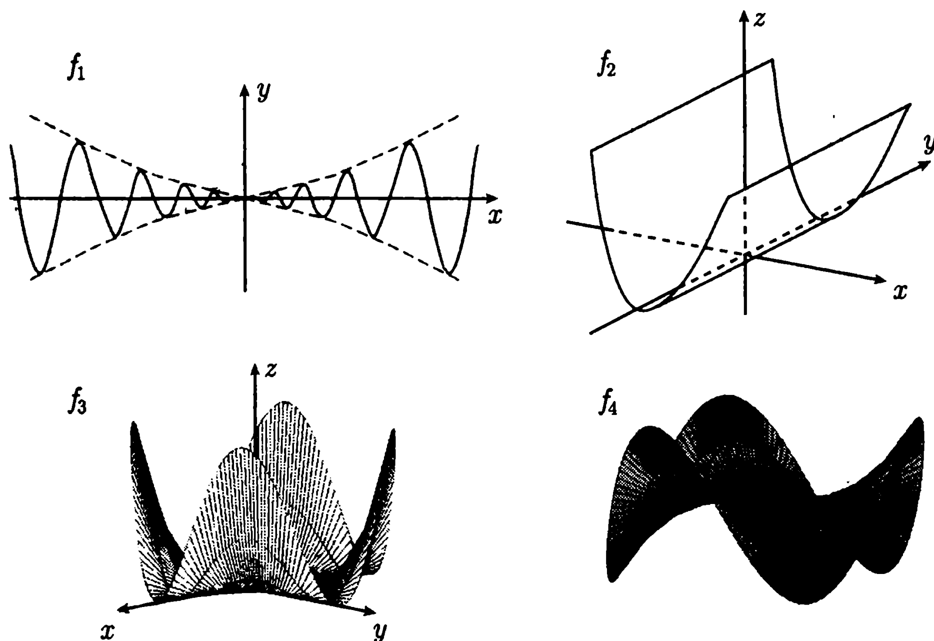


图 1.9

由此可见, 函数在退化临界点附近, 形态多姿多彩, 千变万化, 对它们进行研究是奇点理论的任务. 法国数学家 R. Thom 与俄罗斯数学家 V.I. Arnold 对此作出了杰出的贡献, 见文献 [9, 10].

1.5 子 流 形

定义 1.5.1 设 M, N 为 C^∞ 流形, $F: M \to N$ 为 C^∞ 映射.

(i) 若 F 是单一浸入, 则称 (M, F) 为 N 的 **(浸入)子流形**.

(ii) 若 F 是单一浸入, 且 $F: M \to F(M)$ 是同胚映射, 其中 $F(M) \subset N$ 取子空间拓扑, 则 F 称为从 M 到 N 的**嵌入**, (M, F) 称为 N 的**嵌入子流形**.

例 1 设 $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 定义为 $F(t) = \left(2\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right), \sin 2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right)$, 则 $F(\mathbb{R})$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中横卧的 "8" 字形 (如图 1.10). 当 t 从 0 变到 2π 时, 像点自原点出发走完整个闭路. F 是浸入但不是单射, 故 $(\mathbb{R}, F)$ 不是 $\mathbb{R}^2$ 的子流形.

例 2 设 $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 定义为 $G(t) = \left(2\cos\left(2\arctan t + \frac{\pi}{2}\right), \sin 2\left(2\arctan t + \frac{\pi}{2}\right)\right)$, 当 t 由 $-\infty$ 变至 $+\infty$ 时, $2\arctan t + \frac{\pi}{2}$ 由 $-\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{3\pi}{2}$, 因而 $G(\mathbb{R})$ 等于上例中的 $F((0, 2\pi))$ 部分. 此时, $G(\mathbb{R})$ 还是 $\mathbb{R}^2$ 中横卧的 "8" 字形, 但它通过原点只一次, 当 $t \to \pm\infty$ 时, $G(t) \to (0, 0)$.$(\mathbb{R}, G)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的浸入子流形, 但不是嵌入子流形 (如图 1.11).

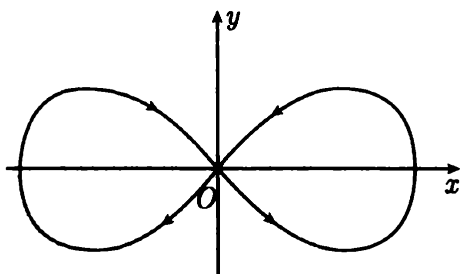


图 1.10

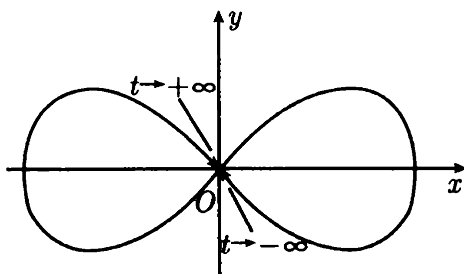


图 1.11

例 3 设 $H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ 定义为 $H(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t)$, $H(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的圆柱螺线. 易见 H 是嵌入, $(\mathbb{R}, H)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的嵌入子流形.

例 4 考虑环面

$$S^1 \times S^1 = \left\{(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\theta_1}, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\theta_2})\right\}.$$

定义 $F: \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ 为 $F(t) = (\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}t}, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha t})$.

当 α 是有理数时, 点集 $F(\mathbb{R})$ 是 $S^1 \times S^1$ 上的一条封闭曲线, 它作为 $S^1 \times S^1$ 的子空间同胚于 S^1, F 是浸入但非单射.

当 α 是无理数时, F 是单一浸入, $(\mathbb{R}, F)$ 是 $S^1 \times S^1$ 的一个子流形. 但是 $F(\mathbb{R})$ 在 $S^1 \times S^1$ 中稠密, 即 $\overline{F(\mathbb{R})} = S^1 \times S^1$ (留作练习), 所以 $F: \mathbb{R} \to F(\mathbb{R}) \subset S^1 \times S^1$ 不是一个同胚映射, 这个子流形称为环面上的**偏斜线**.

将环面表示为对边等同的正方形, F 映 $\mathbb{R}$ 于 $S^1 \times S^1$ 中, 如图 1.12 所示.

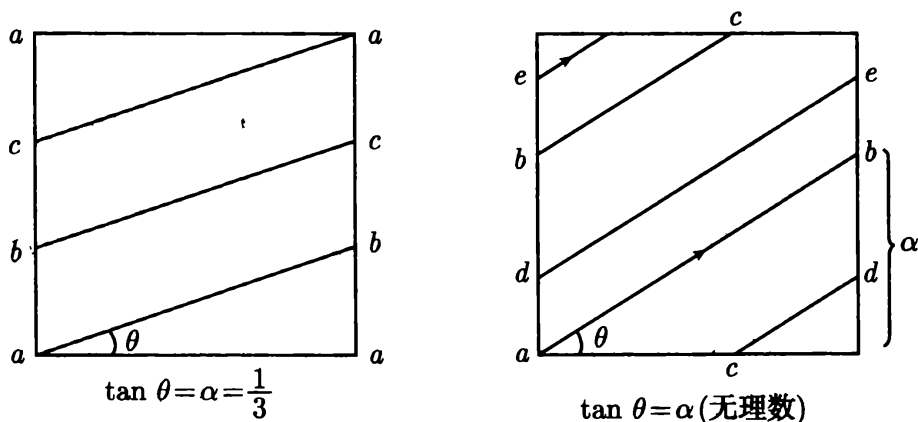


图 1.12

浸入在局部是单一的, 但不能保证在大范围内是单一的, 浸入与子流形的区别在于像集 $F(M)$ 是否有自交点. 对于子流形与嵌入子流形, 因 $F: M \to N$ 是单射, 可把 M 上的微分结构搬到像集 $F(M)$ 上, 使得 $F: M \to F(M)$ 是微分同胚. 另一方面, $F(M)$ 作为 N 的子集有从 N 诱导的拓扑. 因此 $F(M)$ 通过 F 从 M 得到的拓扑与 $F(M)$ 作为 N 的子空间得到的拓扑不一定一致. 可见子流形与嵌入子流形的区别在于上述两种拓扑是否一致.

设 (M_1, F_1) 和 (M_2, F_2) 都是 N 的子流形. 如果存在微分同胚 $\varphi: M_1 \to M_2$, 使得 $F_1 = F_2 \circ \varphi$, 则称这两个子流形是**等价**的. 易见它是 N 的所有子流形组成的集族上的一个等价关系. 每一个等价类 ξ 具有形如 (A, i) 的唯一代表, 其中 A 是 N 的子集, 带有流形结构, 使得包含映射 $i: A \to N$ 为光滑浸入. 事实上, 如果 (M, F) 是 ξ 的任意代表, 那么 N 的子集 A 必为 $F(M)$, 并且可以通过要求 $F: M \to A$ 是微分同胚而赋予 A 以流形结构. A 带有这一流形结构, (A, i) 便成为 N 的一个等价于 (M, F) 的子流形.

从定义 1.1.4 可知, 若 $M \subset N$ 为 N 的正则子流形, 则 M 的基础拓扑是子空间拓扑, 并且 (M, i)(或简单说 M) 是 N 的嵌入子流形, 这里 $i: M \to N$ 为包含映射. 另一方面, 假设 $F: M \to N$ 是从流形 M 到流形 N 的嵌入, 可以证明 $F(M)$ 是 N 的正则子流形 (见习题 21).

命题 1.5.1 设 (M, F) 是光滑流形 N 的子流形. 若 M 是紧致的, 则 $F: M \to N$ 是嵌入.

证明 首先, $F(M)$ 作为 N 的子空间是 Hausdorff 的, 又 $F: M \to F(M)$ 是从紧致空间到 Hausdorff 空间的连续双射, 据点集拓扑的有关知识, $F: M \to F(M)$ 必为同胚映射, 因此 F 是嵌入.

H. Whitney 曾证明任意一个 m 维光滑流形均能嵌入到 $(2m+1)$ 维欧氏空间中作为子流形, 这说明虽然有限维流形的概念是欧氏空间的非常一般的推广, 但仍

然可作为欧氏空间的嵌入子流形来实现. 流形的浸入和嵌入理论是微分拓扑的一个重要研究专题, 我们将在 1.7 节中介绍 Whitney 浸入定理和 Whitney 嵌入定理.

定义 1.5.2 设 M, N 为 C^∞ 流形, $F: M \to N$ 为 C^∞ 映射. 点 $p \in M$ 称 F 的**正则点**, 如果 $(\mathrm{d}F)_p$ 是满射. 点 $q \in N$ 称 F 的**正则值**, 如果 $F^{-1}(q) = \varnothing$ 或当 $F^{-1}(q) \neq \varnothing$ 时, $F^{-1}(q)$ 的每一点皆为正则点.

显然, F 是淹没当且仅当 M 中的每一点都是正则点, 或 N 中的每一点都是正则值.

定理 1.5.1 设 M, N 分别为 m 维和 n 维 C^∞ 流形, $F: M \to N$ 为 C^∞ 映射, $q \in F(M)$ 为 F 的正则值, 则 $F^{-1}(q)$ 是 M 的 $(m-n)$ 维正则子流形.

注 本定理实质上是定理 1.4.4 的另一表述形式, 下面利用秩定理给出另一简洁证法.

证明 取 $p \in F^{-1}(q)$, 则 $F(p) = q$ 且 $\mathrm{Rank}_p F = n$. 这说明 F 的秩在点 p 附近为常值. 由秩定理 1.4.5 知, 存在可逆坐标变换芽 $\varphi: (M, p) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ 和 $\psi: (N, q) \to (\mathbb{R}^n, 0)$, 使得芽 $F_1 = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ 具有下列形式:

$$F_1(x_1, \cdots, x_n, \cdots, x_m) = (x_1, \cdots, x_n).$$

因此芽 $F_1^{-1}(0) = \varphi \circ F^{-1} \circ \psi^{-1}(0) = \varphi \circ F^{-1}(q)$ 是集 $\{(0, \cdots, 0, x_{n+1}, \cdots, x_m)\}$ 在原点处的芽. 依定义 1.1.4, $F^{-1}(q)$ 是 M 中维数为 $m-n$ 的正则子流形.

例 5 在上一节例 2 中, 曾证明正交群

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathrm{R}) | A^{\mathrm{T}} A = I_n\}$$

是 $GL(n, \mathbb{R})$ 的 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 维正则子流形, 现介绍另一种较为简洁的证法. 仍记 S 为 $n \times n$ 实对称矩阵组成之流形, 令 $F: GL(n, \mathbb{R}) \to S$ 定义为 $F(A) = A^{\mathrm{T}} A$, 则 F 是光滑映射, 且 $O(n) = F^{-1}(I_n)$. 若能证明 I_n 是 F 的正则值, 据定理 1.5.1, 结论得证.

任取 $A \in F^{-1}(I_n)$, 则 $A^{\mathrm{T}} A = I_n$. 我们证明微分 $(\mathrm{d}F)_A : T_A GL(n, \mathbb{R}) (\cong \mathbb{R}^{n^2}) \to T_{I_n} S (\cong \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)})$ 是满射. 为此, 在 $GL(n, \mathbb{R})$ 中取一条经过点 A 的道路 $\omega: \mathbb{R} \to GL(n, \mathbb{R})$, $\lambda \mapsto \omega(\lambda) = A + \lambda B$, 则 $F \circ \omega: \mathbb{R} \to S$ 为 S 中的道路, $F(\omega(\lambda)) = I_n + \lambda(A^{\mathrm{T}} B + B^{\mathrm{T}} A) + \lambda^2 B^{\mathrm{T}} B$, 因而 $(\mathrm{d}F)_A(B) = A^{\mathrm{T}} B + B^{\mathrm{T}} A$. 这说明 $(\mathrm{d}F)_A \left(\mathbb{R}^{n^2}\right)$ 由形如 $A^{\mathrm{T}} B + B^{\mathrm{T}} A$ 的所有对称矩阵组成, 其中 $A^{\mathrm{T}} A = I_n, B \in \mathbb{R}^{n^2}$. 另外, 对于任意的对称矩阵 C, 取 $B = \frac{1}{2} AC$, 则有 $(\mathrm{d}F)_A(B) = C$, 因此 $(\mathrm{d}F)_A$ 为满射. 由于 $A \in F^{-1}(I_n)$ 是任取的, 故 I_n 是 F 的正则值.

命题 1.5.2 设 $F: M \to M$ 是连通光滑流形 M 到自身的光滑映射且满足 $F \circ F = F$, 则 $F(M)$ 是 M 的闭正则子流形.

证明 由 $F \circ F = F$ 知

$$F(M) = \{q \in M | F(q) = q\}$$

是 F 的不动点集, 它是 M 的闭子集 (只需利用点集拓扑知识, 证明留作练习). 为了证明 $F(M)$ 是 M 的正则子流形, 我们在 $F(M)$ 的任一点的邻域内讨论 F. 根据秩定理, 只需对 $F(M)$ 的每一点, 证明在该点的某一邻域内, F 的秩为常值即可. 首先证明 $\mathrm{Rank}_p F$ 在 $F(M)$ 上为常值.

设 $p \in F(M)$, 则 F 在点 p 的微分满足 $(\mathrm{d}F)_p \circ (\mathrm{d}F)_p = (\mathrm{d}F)_p$, 因此

$$\mathrm{Im}((\mathrm{d}F)_p) = \{X \in T_pM | (\mathrm{d}F)_p(X) = X\} = \mathrm{Ker}(id - (\mathrm{d}F)_p),$$

其中 $id : T_pM \to T_pM$ 为恒同映射. 又

$$\dim \mathrm{Ker}(id - (\mathrm{d}F)_p) + \dim \mathrm{Im}(id - (\mathrm{d}F)_p) = \dim M,$$

于是有

$$\mathrm{Rank}_p F + \mathrm{Rank}(id - (\mathrm{d}F)_p) = \dim M \quad \text{对每一 } p \in F(M).$$

因为等式左边的两个秩在点 p 的邻域内不会减少, 所以 $\mathrm{Rank}_p F$ 在 $F(M)$ 上局部为常值. 而 M 连通, 故 $F(M)$ 亦连通, 从而在 $F(M)$ 上 F 的秩为常值.

现设 $\mathrm{Rank}_p F = r$, 其中 $p \in F(M)$, 则存在 $F(M)$ 在 M 中的开邻域 U, 使得对所有 $q \in U, \mathrm{Rank}_q F \geqslant r$. 但

$$\mathrm{Rank}_q F = \mathrm{Rank}_q (F \circ F) = \mathrm{Rank}\left((\mathrm{d}F)_{F(q)} \circ (\mathrm{d}F)_q\right) \leqslant \mathrm{Rank}_{F(q)} F = r,$$

所以 $\mathrm{Rank}_q F$ 在 U 上为常值. 根据以上分析. 本命题得证.

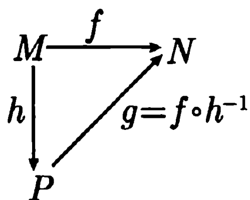
1.6 Sard 定理

在微分流形理论中, Sard 定理是许多重要的存在性定理的理论依据, 本章余下两节证明 Whitney 浸入与嵌入定理以及 Thom 横截性定理都用到它.

定义 1.6.1 设 M, N 为光滑流形, 且 $\dim N = n$, 又设 $f : M \to N$ 是光滑映射. 若点 $p \in M$ 使得 $(\mathrm{d}f)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ 的秩 $\mathrm{Rank}_p f < n$, 则点 p 称为 f 的**临界点**; 若 $\mathrm{Rank}_p f = n$, 则点 p 称为 f 的**正则点**.

f 的全体临界点的集合记为 C_f. 如果 $q \in N$ 使得 $f^{-1}(q) \bigcap C_f = \varnothing$, 那么点 q 称为 f 的一个**正则值**. f 的全体正则值的集合是 $N - f(C_f)$, 其中 $f(C_f)$ 称为 f 的**临界值集**. 显然, f 的全体正则点的集合是 $M - C_f$.

引理 1.6.1 设 M, N, P 是光滑流形, $f : M \to N$ 为 C^∞ 映射, $h : M \to P$ 为 C^∞ 微分同胚, 并设 $g = f \circ h^{-1}$, 则



(i) $p \in C_f \Leftrightarrow h(p) \in C_g$,

(ii) $f(C_f) = g(C_g)$.

证明留作练习.

为叙述并证明 Sard 定理, 我们引入零测度集和 Fubini 定理以作准备.

设 C 为 $\mathbb{R}^n$ 的子集. 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在可数个 n 维开立方体 $\{W_i\}$, 使得 $C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i$ 且 $\sum_{i=1}^{\infty} |W_i| < \varepsilon$, 则称集 C 为**零测度集**, 这里 $|W|$ 表方体 W 的体积, 即若 $W = \{x \in \mathbb{R}^n | a_i < x_i < b_i, b_i - a_i = l, i = 1, \cdots, n\}$, 则 $|W| = l^n$. 容易证明可数个零测度集的并仍为零测度集.

引理 1.6.2 设 U 为 $\mathbb{R}^n$ 中开集, $C \subset U$ 为零测度集. 若 $f: U \to \mathbb{R}^n$ 为 $C^k (k \geqslant 1)$ 类映射, 则 $f(C)$ 的测度为 0.

证明 U 可表为可数个有界闭球的并, 故可假定 C 包含在一个有界闭球内, 并且组成 C 的覆盖的诸方体均包含在稍微大一点的有界闭球 K 内, 但 $K \subset U$.

由微积分学的中值定理知, 对任意 $x, x+h \in K$, 存在常数 c, 使得

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leqslant c\|h\|.$$

当边长为 a 的方体 $W \subset K$ 时, 对 $x, x_0 \in W$, 有 $\|x - x_0\| \leqslant \sqrt{n}a$, 因此 $\|f(x) - f(x_0)\| \leqslant c \cdot \sqrt{n}a$, 从而 $f(W)$ 位于体积为 $(2\sqrt{n}c)^n|W|$ 的 n 维方体内, 而常数 $c' = (2\sqrt{n}c)^n$ 与 W 无关. 因此, 若 $C \subset \bigcup_i W_i \subset K$, 且 $\sum_i |W_i| < \varepsilon / c'$ 时, $f(C) \subset \bigcup_i f(W_i)$, 因而 $f(C)$ 包含在总体积小于 ε 的 n 维方体的并之中, 这说明 $f(C)$ 是零测度集.

推论 1.6.1 设 $\varphi: U \to V$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中开集 U 与 V 之间的微分同胚, $C \subset U$ 为零测度集, 则 $\varphi(C)$ 也是零测度集.

现介绍 Fubini 定理的一个特殊情形.

定理 1.6.1 设 C 为 $\mathbb{R}^n$ 中的紧致子集. 令 $\mathbb{R}_t^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n = t\}, C_t = C \bigcap \mathbb{R}_t^{n-1}$. 若对所有 $t \in \mathbb{R}$, C_t 在 $\mathbb{R}_t^{n-1}$ (同胚于 $\mathbb{R}^{n-1}$) 中具有零测度, 则 C 在 $\mathbb{R}^n$ 中具有零测度.

证明 不失一般性, 假定 $C \subset \mathbb{R}^{n-1} \times [0,1]$. 依假设, 对每一 $t \in [0,1], C_t$ 在 $\mathbb{R}^{n-1} \times \{t\}$ 中具有零测度. 因此, 任给 $\varepsilon > 0$, 可找到 C_t 的开覆盖 $\{W_t^i | W_t^i$ 是 $\mathbb{R}_t^{n-1}$ 中的开方体, $i \in \mathbb{N}\}$, 使得 $\sum_i |W_t^i| < \varepsilon$. 设 $\bigcup_i W_t^i$ 在 $\mathbb{R}^{n-1} \times [0,1]$ 的第一因子 $\mathbb{R}^{n-1}$ 上的投影为 W_t, 显然 W_t 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的开集.

对固定的 $t, |x_n - t|$ 是 C 上的连续函数, 且在 C_t 上取值为 0. 而 $C - (W_t \times [0,1])$

是 C 的闭子集因而是紧致子集. 将函数 $|x_n-t|$ 限制在 $C-(W_t\times[0,1])$ 上必取得极小值, 设为 α. 记 $I_t^\alpha=(t-\alpha,t+\alpha)$, 则 $C\bigcap\{x\in\mathbb{R}^n||x_n-t|<\alpha\}\subset W_t\times I_t^\alpha$. 注意区间族 $\{I_t^\alpha\}$ 覆盖 $[0,1]$, 故存在有限子覆盖, 设为 $\{I_j|j=1,\cdots,k\}$ (这里 $I_j=I_{t_j}^{\alpha_j}$), 使得 $\sum|I_j|\leqslant d$ (常数), 从而由长方体组成的可数族 $\{W_{t_j}^i\times I_j|j=1,\cdots,k,i\in\mathbb{N}\}$ 覆盖 C 并且总体积小于 $d\varepsilon$.

注 在上述 Fubini 定理中, 要求 C 为紧致集的条件可削弱为 C 是可数个紧致集的并. 而满足后一条件的集包括: 闭集、开集以及它们在连续映射下的像集, 还有以上类型的集的可数并及有限交.

现在将欧氏空间中的零测度集的概念引伸到流形中去.

定义 1.6.2 设 N 为 n 维微分流形, $C\subset N$. 如果对任意的局部坐标卡 (U,φ), 集 $\varphi(U\bigcap C)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测度集, 那么称子集 C 具有**零测度**.

定理 1.6.2 (Sard 定理) 设 M,N 为 C^∞ 流形, $f:M\to N$ 为 C^∞ 映射, 则 $f(C_f)$ 是 N 中的零测度集.

该定理是说流形之间的可微映射的临界值集具有零测度.

证明 因流形满足第二可数性定理, 依命题 1.2.1 , 可以将流形表示成可数个局部坐标域的并集, 再依定义 1.6.2 以及引理 1.6.1, 我们只须就下列局部形式的结论予以证明就行了.

设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中开集, $f:U\to\mathbb{R}^n$ 为 C^∞ 映射, 假定 $C=\{x\in U|\mathrm{Rank}_x f<n\}$ 为 f 的临界点集, 那么 $f(C)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的测度为 0.

下面对维数 m 作归纳证明. 当 $m=0$ 时, 结论显然成立, 因此我们假定 $m,n\geqslant 1$.

令 $C_j=\{x\in U|f$ 在点 x 处的阶数 $\leqslant j$ 的各阶偏导数均为 $0\}$, 则 C_j 为闭集, 且有

$$C\supset C_1\supset C_2\supset\cdots, \tag{1}$$

$$f(C)=f(C-C_1)\bigcup f(C_1-C_2)\bigcup\cdots\bigcup f(C_{k-1}-C_k)\bigcup f(C_k). \tag{2}$$

我们将证明:

(i) $f(C-C_1)$ 是零测度集;

(ii) $f(C_{j-1}-C_j)$ 是零测度集, $j=2,3,\cdots$;

(iii) 存在自然数 k, 使得 $f(C_k)$ 是零测度集.

以上各集以及证明中所出现的集均符合 Fubini 定理之注中所述要求, 因而可以应用 Fubini 定理.

(i) 的证明 当 $n=1$ 时, $C=C_1$, 因此假定 $n\geqslant 2$. 对于每一 $x\in C-C_1$, 若能找到点 x 的开邻域 $V(\subset\mathbb{R}^m)$, 使得 $f(V\bigcap(C-C_1))$ 具有零测度, 那么 $f(C-C_1)$ 的测度为 0, 因为 $C-C_1$ 可以被可数个这样的 V 所覆盖.

设 $a\in C-C_1$, 则至少有一个一阶偏导数, 例如 $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}$, 在点 a 的值不为 0. 定义

映射 $h: U \to \mathbb{R}^m, x \mapsto (f_1(x), x_2, \cdots, x_m)$, 则 $Dh(a)$ 的秩为 m. 据反函数定理, 存在 $\mathbb{R}^m$ 中点 a 的开邻域 V 和点 $h(a)$ 的开邻域 W, 使得 $h|V: V \to W(=h(V))$ 为光滑同胚. 复合映射 $g = f \circ h^{-1}: W \to \mathbb{R}^n$ 具有下列形式.

$$g: (z_1, \cdots, z_m) \to (z_1, g_2(z), \cdots, g_n(z)), \tag{3}$$

在映射 g 下, 每个点 $(t, z_2, \cdots, z_m) \in W$ 映为超平面 $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ 上的点 $g(t, z_2, \cdots, z_m)$, 所以 g 将 W 中的超平面 $\{z|z_1 = t\}$ 映入 $\mathbb{R}^n$ 中的超平面 $\{y|y_1 = t\}$.

记 $z' = (z_2, \cdots, z_m), W_t = W \bigcap (\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1})$, 考虑一族光滑映射 $g^t: W_t \to \mathbb{R}^{n-1}$, 定义为 $g^t(z') = (g_2(t, z'), \cdots, g_n(t, z'))$, 则 z' 为 g^t 的临界点当且仅当 (t, z') 为 g 的临界点, 因为 g 的 Jacobi 矩阵

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial z_j}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & (\partial g_i^t / \partial z_j) \end{pmatrix}.$$

令 $C' = h((C - C_1) \bigcap V) \subset W$, 则 $f((C - C_1) \bigcap V) = g(C')$. 而依 (3) 式, 我们有

$$g(C') \bigcap \left(\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}\right) = g\left(C' \bigcap (\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1})\right) \subset \{t\} \times g^t(C_{g^t}).$$

根据归纳假设, g^t 的临界值集 $g^t(C_{g^t})$ 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的零测度集, 因而 $g(C')$ 与每一超平面 $\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ 的交是一个零测度集, 那么依据 Fubini 定理, $g(C') = f((C - C_1) \bigcap V)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测度集. 这就证明了 (i).

(ii) 的证明　对于 $a \in C_{j-1} - C_j$, 存在某个 j 阶偏导数在点 a 的值不为 0, 不妨设

$$\frac{\partial^j f}{\partial x_1 \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_j}}(a) \neq 0.$$

令函数 $\eta: U \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\eta(x) = \frac{\partial^{j-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_j}}(x),$$

则 $\dfrac{\partial \eta}{\partial x_1}(a) \neq 0$, 于是由 $h(x) = (\eta(x), x_2, \cdots, x_m)$ 定义的映射 $h: U \to \mathbb{R}^m$ 将点 a 的某一开邻域 V 微分同胚地映成点 $h(a)$ 的开邻域 $W = h(V)$. 因为对每一 $x \in C_{j-1} - C_j$, 有 $\eta(x) = 0$, 所以

$$h((C_{j-1} - C_j) \bigcap V) \subset W \bigcap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1}).$$

令 $g = f \circ h^{-1}: W \to \mathbb{R}^n$ 及 $g^0 = g|_{W \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{m-1})}$. 按照归纳假设, g^0 的临界值集 $g^0(C_{g^0})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的测度为 0; 而

$$f((C_{j-1} - C_j) \bigcap V) = g(h((C_{j-1} - C_j) \bigcap V)) \subset g^0(C_{g^0}),$$

所以 $f((C_{j-1}-C_j)\bigcap V)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测度集. 由于 $C_{j-1}-C_j$ 被可数个这样的 V 所覆盖, 因此 $f(C_{j-1}-C_j)$ 具有零测度.

(iii) 的证明 当 $k>\dfrac{m}{n}-1$ 时, 将证明 $f(C_k)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测度集. 为此, 只须对任意的 m 维闭方体 $P\subset U$, 证明 $f(P\bigcap C_k)$ 是零测度集.

由 Taylor 公式, P 的紧致性以及 C_k 的定义可知, 当 $x\in P\bigcap C_k, x+\delta\in P$ 时,

$$|f(x+\delta)-f(x)|\leqslant b\cdot|\delta|^{k+1}, \tag{4}$$

这里 b 是一个仅依赖于 f 和 P 的常数.

设 P 的边长为 a, 将 P 剖分成边长为 a/r 的小方体, 这样的 m 维小方体共有 r^m 个. 假设 Q 为其中的一个, 它包含 C_k 中的一点 x, 那么 Q 中的任意一点可写为 $x+\delta, |\delta|\leqslant\sqrt{m}\cdot a/r$. 由 (4) 式知, $f(Q)$ 位于边长为

$$2b\cdot\left(\frac{\sqrt{m}a}{r}\right)^{k+1}=\frac{c}{r^{k+1}}$$

的 n 维方体中, 因此 $f(P\bigcap C_k)$ 包含在最多 r^m 个这样的 n 维方体的并之中, 这些方体的总体积

$$\Omega\leqslant r^m\cdot\left(\frac{c}{r^{k+1}}\right)^n=c^n r^{m-(k+1)n}.$$

已假定 $n(k+1)>m$, 故可选取足够大的 r, 使得上式右边小于 ε, 于是 $f(P\bigcap C_k)$ 必有零测度.

至此, 我们证明了论断 (i)、(ii) 和 (iii), 从而完成了 Sard 定理的证明.

推论 1.6.2 设 $f:M\to N$ 为光滑映射, 则 f 的正则值集 $N-f(C_f)$ 在 N 中处处稠密.

推论 1.6.3 若 $f:M\to N$ 为光滑映射且 $\dim M<\dim N$, 则集 $f(M)$ 在 N 中的测度为零. 特别, 像集 $f(M)$ 不充满整个 N.

一个简单应用: 讨论由方程表示的曲线和曲面. 设 U 为 $\mathbb{R}^m$ 中的开集, $f:U\to\mathbb{R}^n$ 为 C^∞ 映射, 且 $m\geqslant n$, 那么对任意 $b\in\mathbb{R}^n$, 方程 $f(x)=b$ 的解集 $f^{-1}(b)$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中的闭集, 一般来说可能相当复杂, 因此有必要考察哪些 $b\in\mathbb{R}^n$ 能保证 $f^{-1}(b)$ 成为 C^∞ 流形. 推论 1.6.2 及定理 1.5.1 告诉我们: 对于几乎所有的 $b_i\in\mathbb{R}\,(i=1,\cdots,n)$ (这意指 $b=(b_1,\cdots,b_n)$ 取自 $\mathbb{R}^n$ 中除去一个零测度集 $f(C_f)$ 以外的所有点), 非线性方程

$$f_i(x)=b_i,\quad i=1,\cdots,n$$

如果有解, 则它的解集为 $\mathbb{R}^m$ 中一个 $(m-n)$ 维微分子流形.

1.7 流形到欧氏空间中的嵌入与浸入

欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的光滑曲线、光滑曲面提供了微分流形的诸多实例, 人们自然会问: 是否每一个微分流形都可以安装到一个欧氏空间中去? 或者说在什么条件下, 一个 m 维微分流形 M 可以嵌入到某个 $\mathbb{R}^n$ 中? 为此需寻找嵌入 $f: M \to \mathbb{R}^n$, 并且希望 $\mathbb{R}^n$ 的维数 n 越小越好. 本节将证明 Whitney 关于浸入与嵌入的经典结果. 首先考虑流形的浸入, 从一个特殊情形入手.

1.7.1 浸入的存在性

引理 1.7.1 设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集, $f: U \to \mathbb{R}^n$ 为 C^∞ 映射, 其中 $n \geqslant 2m$, 则对任给的正实数 ε, 存在 $n \times m$ 矩阵 $A = (a_{ij})$, 满足条件 $|A| = \max\limits_{i,j}\{|a_{ij}|\} < \varepsilon$, 使得 $g(x) = f(x) + Ax$ 在 U 上是浸入.

证明 我们希望选取 $A \in M(n,m)$, 使得映射 $g(x) = f(x) + Ax$ 为浸入, 即选取 A, 使得对所有 $x \in U, Dg(x) = Df(x) + A$ 的秩等于 m, 因而选取的 A 使得

$$Df(x) + A \notin M(n,m;k), \quad \forall x \in U, k < m,$$

也就是

$$A \neq B - Df(x), \quad \forall B \in M(n,m;k),\ k = 0,1,\cdots,m-1,\ x \in U.$$

为此, 对于 $k < m$, 考察映射

$$\varphi_k: M(n,m;k) \times U \to M(n,m), (B,x) \mapsto B - Df(x).$$

因为 $n \geqslant 2m, \dim(M(n,m;k) \times U) = nm - (n-k)(m-k) + m \leqslant nm - [n-(m-1)][m-(m-1)] + m \leqslant nm - 1 < \dim M(n,m)$, 所以由推论 1.6.3, $\varphi_k(M(n,m,k) \times U)$ 应是 $M(n,m)$ 中的零测度集, $k = 0,1,\cdots,m-1$. 我们可以在

$$M(n,m) - \bigcup_{k=0}^{m-1} \varphi_k(M(n,m;k) \times U)$$

中选择 A, 满足条件 $|A| < \varepsilon$. 于是对每一 $x \in U, Dg(x) = Df(x) + A$ 的秩为 m, 从而 g 在 U 上是一个浸入映射.

本引理告诉我们, 若 $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ 不是浸入, 那么对它施加一个线性扰动 $A \cdot x$ 就可变成浸入 g. 另外, 因 $A \in M(n,m)$ 任意接近于零矩阵, 这说明 g 与 f 非常接近. 对后者我们还可以说得更确切些.

设 X 是拓扑空间, (Y,d) 是度量空间. 从空间 X 到空间 Y 的连续映射全体记为 $C^0(X,Y)$, 又设 $\delta: X \to \mathbb{R}$ 是一个取正值的连续函数. 对于 $f,g \in C^0(X,Y)$, 如果对每一 $x \in X$, 有 $d(f(x),g(x)) < \delta(x)$, 则称 g 是 f 的一个 δ-**逼近**.

若将 f 的诸 δ- 逼近取为 f 在映射空间 $C^0(X,Y)$ 中的一个邻域, 那么所有这样的邻域的集合形成 $C^0(X,Y)$ 的一个拓扑基, 由此可唯一确定 $C^0(X,Y)$ 的一个拓扑.

定理 1.7.1 (Whitney 浸入定理) 设 M 是 m 维光滑流形, $f: M \to \mathbb{R}^n$ 为光滑映射, 其中 $n \geqslant 2m$, 又 $\delta: M \to \mathbb{R}$ 是一个取正值的连续函数, 则存在一个浸入 $g: M \to \mathbb{R}^n$, 它是 f 的 δ- 逼近.

此外, 如果在 M 的闭集 F 上 $\mathrm{Rank} f = m$, 则可取 $g|_F = f|_F$.

在证明之前, 先简要地介绍证明思路. 流形 M 可以表成可数个局部坐标域的并. 引理 1.7.1 断言: 映射 f 在任何一个局部坐标域上可以经过小的改动而变为浸入, 因此我们一小块又一小块地逐步对 f 作小的修改, 而每次修改后的映射要求在新的一小块上为浸入而且保持在原有若干块上的浸入性质, 进而对所作的一列映射取极限, 这样最后得到所要求的浸入映射 g.

证明 由条件可知, 存在闭集 F 的开邻域 U, 使得在 U 上 $\mathrm{Rank} f = m$. 对于 M 的开覆盖 $\mathcal{Q} = \{U, M-F\}$, 依据命题 1.2.1, 存在 M 的可数个局部坐标卡 (U_i, φ_i), 使得 $\mathcal{U} = \{U_i\}$ 是 $\mathcal{Q}$ 的一个局部有限的开加细, 并且 $\varphi_i(U_i) = B_0(3), V_i = \varphi_i^{-1}(B_0(2))$, $W_i = \varphi_i^{-1}(B_0(1))$, 又 $\mathcal{W} = \{W_i\}$ 为 M 的开覆盖. 此外假定这些 U_i 用整数标号具有性质: $i \leqslant 0$ 当且仅当 $U_i \subset U$.

我们归纳地构作一列光滑映射 $\{g_k: M \to \mathbb{R}^n\}$ 如下. 取 $g_0 = f$. 假定 $g_{k-1}: M \to \mathbb{R}^n$ 在 $\bigcup\limits_{j<k} \overline{W_j}$ 上的秩为 m, 考虑 $g_{k-1} \circ \varphi_k^{-1}: B_0(3) \to \mathbb{R}^n$. 令 A 为一个 $n \times m$ 矩阵, $F_A: B_0(3) \to \mathbb{R}^n$ 定义为

$$F_A(x) = g_{k-1} \circ \varphi_k^{-1}(x) + \xi(x)Ax,$$

其中 $\xi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 为 C^∞ 函数, 如引理 1.2.1 中所述, 当 $\|x\| \leqslant 1$ 时, $\xi(x) = 1$; 当 $1 < \|x\| < 2$ 时, $0 < \xi(x) < 1$; 当 $\|x\| \geqslant 2$ 时, $\xi(x) = 0$. 又 A 待定, x 为 $m \times 1$ 列向量.

因为 $\mathcal{W} = \{W_i\}$ 局部有限, 因此 $K = \varphi_k\left(\bigcup\limits_{j<k} \overline{W_j} \cap \overline{V_k}\right)$ 是紧致集, 并且 $g_{k-1} \circ \varphi_k^{-1}$ 在 K 上的秩为 m. 而映射 $G: K \times M(n,m) \to M(n,m), (x, A) \mapsto G(x, A) = D(F_A(x)) = D(g_{k-1} \circ \varphi_k^{-1}(x)) + Ax \cdot D\xi(x) + \xi(x)A$($D\xi$ 为 $1 \times m$ 行向量) 显然是连续的, 又 $G(K \times \{0\}) \subset M(n,m;m)$, 其中 $M(n,m;m)$ 是 $M(n,m)$ 的开子集, 所以当 A 充分小时,

$$G(K \times \{A\}) \subset M(n,m;m),$$

这是关于 A 的第 1 个要求.

其次, 要求 A 足够小, 使得对于所有的 $x \in B_0(3), \|Ax\| < \varepsilon_k/2^k$, 其中 ε_k 为 $\delta(x)$ 在紧致集 $\overline{V_k}$ 上的最小值, 这是关于 A 的第 2 个要求.

再次, 根据引理 1.7.1, A 可以选得足够小, 使得在 $B_0(2)$ 上, $g_{k-1} \circ \varphi_k^{-1}(x) + Ax$ 的秩为 m, 这是关于 A 的第 3 个要求.

现在用等式

$$g_k(p) = \begin{cases} g_{k-1}(p) + \xi(\varphi_k(p)) \cdot A \cdot \varphi_k(p), & p \in U_k, \\ g_{k-1}(p), & p \in M - \overline{V}_k \end{cases}$$

来定义 $g_k : M \to \mathbb{R}^n$. 在 $U_k \bigcap (M - \overline{V}_k)$ 上, $g_k(p)$ 的两种定义是一致的, 故 g_k 是 C^∞ 的.

由对 A 的第 1 个要求, g_k 在 $\bigcup\limits_{j<k} \overline{W_j}$ 上的秩为 m; 再据第 3 个要求, g_k 在 $\overline{W_k}$ 上的秩为 m, 因此 g_k 在 $\bigcup\limits_{j \leqslant k} \overline{W_j}$ 上的秩为 m. 而由第 2 个要求知, g_k 是 g_{k-1} 的 $\delta/2^k$-逼近.

定义 $g(p) = \lim\limits_{k \to +\infty} g_k(p)$. 因为 $\mathcal{U} = \{U_i\}$ 是 M 的局部有限的开覆盖, 因此对每一 $p \in M$, 存在点 p 的开邻域 $N(p)$, 以及自然数 k_0, 当 $k > k_0$ 时, 在 $N(p)$ 上有 $g_k = g_{k+1} = \cdots = g$, 于是 g 是 C^∞ 的并且它的秩处处为 m. 另外由

$$g(p) = f(p) + \sum_{k=1}^{\infty} (g_k(p) - g_{k-1}(p))$$

易见 g 是 f 的一个 δ- 逼近. 定理证毕.

如果把定理 1.7.1 中的条件 $n \geqslant 2m$ 加强为 $n > 2m$, 那么还可要求从 M 到 $\mathbb{R}^n$ 的浸入映射是单射.

定理 1.7.2　设 M 是 m 维光滑流形, $f : M \to \mathbb{R}^n$ 为浸入, 其中 $n > 2m$, 又 $\delta : M \to \mathbb{R}$ 是正连续函数, 则存在单一浸入 $g : M \to \mathbb{R}^n$, 它是 f 的 δ- 逼近.

此外, 如果 f 在闭集 F 的一个开邻域 U 中是单射, 则可选取 g 满足 $g|_F = f|_F$.

证明　由秩定理知, 浸入在局部是单射, 即对每一 $p \in M$, 存在点 p 的开邻域 $N(p)$, 使得 $f|_{N(p)}$ 是单射. $\{N(p) | p \in M\}$ 是 M 的一个开覆盖, 据命题 1.2.1, 存在可数个局部坐标卡 (U_i, φ_i), 使得 $\mathcal{U} = \{U_i | i \in \mathbb{Z}\}$是$\{N(p) | p \in M\}$ 及 $\{U, M - F\}$ 的局部有限的开加细, 并且整数 i 具有性质: $i \leqslant 0 \Leftrightarrow U_i \subset U$. 令 $\lambda_i : M \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\lambda_i(p) = \begin{cases} \xi(\varphi_i(p)), & p \in U_i, \\ 0, & p \in M - U_i, \end{cases}$$

其中 $\xi(x)$ 如定理 1.7.1 证明中所述. 显然 λ_i 是 C^∞ 函数.

现按以下方式归纳地构作一列浸入映射 $\{g_k : M \to \mathbb{R}^n\}$. 取 $g_0 = f$. 若给定了浸入 $g_{k-1} : M \to \mathbb{R}^n$, 则用等式

$$g_k(p) = g_{k-1}(p) + \lambda_k(p) b_k$$

来定义 $g_k : M \to \mathbb{R}^n$, 其中 $b_k \in \mathbb{R}^n$ 待定. 选取 b_k 满足如下要求: b_k 取得充分小, 使得 g_k 的秩处处为 m, 并且 g_k 是 g_{k-1} 的 $\delta/2^k$- 逼近. 此外, 对 b_k 的选取还有下列要求. 令 $G_k = \{(p,q) \in M \times M | \lambda_k(p) \neq \lambda_k(q)\}$, 它是 $M \times M$ 的开子集. 定义映射 $\mu_k : G_k \to \mathbb{R}^n$ 为

$$\mu_k(p,q) = -\frac{g_{k-1}(p) - g_{k-1}(q)}{\lambda_k(p) - \lambda_k(q)},$$

显然 μ_k 是 C^∞ 映射. 因 $\dim(M \times M) = 2m < n$, 故 $\mu_k(G_k)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的零测度集. 选取 b_k 充分小使它不在这像集中, 由此可推出: 当 $k > 0$ 时,

$$g_k(p) - g_k(q) = 0 \Leftrightarrow \lambda_k(p) = \lambda_k(q) \text{ 且 } g_{k-1}(p) = g_{k-1}(q). \tag{1}$$

定义 $g(p) = \lim\limits_{k \to +\infty} g_k(p)$. 因为 $\mathcal{U} = \{U_i\}$ 是局部有限族, 所以对任意一个 W_{k_0}, 存在自然数 $k_1 > k_0$, 使得当 $k > k_1$ 时, 对每一 $p \in W_{k_0}$, 有 $g_k(p) = g_{k+1}(p)$, 从而有 $g(p) = g_k(p)$. 现在证明 g 是单射.

任取 $p, q \in M$, 假设 $g(p) = g(q)$. 如上所述, 存在自然数 k_1 和 k_2 分别使得

$$g(p) = g_k(p)(k > k_1) \quad \text{和} \quad g(q) = g_k(q)(k > k_2),$$

因而当 $k > \max\{k_1, k_2\}$ 时, 有 $g_k(p) = g_k(q)$, 反复使用 (1) 式便可得到

$$\begin{cases} \lambda_i(p) = \lambda_i(q), \quad i = 1, 2, \cdots \\ f(p) = g_0(p) = g_0(q) = f(q). \end{cases}$$

因 $\mathcal{W} = \{W_i\}$ 是 M 的开覆盖, 不妨设 $p \in W_{i_0}$, 那么由 $\lambda_{i_0}(q) = \lambda_{i_0}(p) = 1$ 知 $q \in \overline{W_{i_0}} \subset U_{i_0}$. 而 $\{U_i\}$ 是 $\{N(p) | p \in M\}$ 的加细, 因此 $f|_{U_{i_0}}$ 是单射. 注意到 $p, q \in U_{i_0}, f(p) = f(q)$, 所以 $p = q$. 这样一来, 从 $g(p) = g(q)$ 推出 $p = q$, 说明 g 是单射. 至于 g 是浸入并且是 f 的 δ- 逼近, 留给读者验证.

1.7.2 常态映射与 Whitney 嵌入定理

由定理 1.7.2 知, 对于 m 维光滑流形 M, 存在单一浸入 $g : M \to \mathbb{R}^n$, 其中 $n \geqslant 2m+1$. 倘若 g 是闭映射 (即 g 将 M 中的闭集映成 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集), 据点集拓扑学的一个基本结果, g 是从 M 到 $g(M) (\subset \mathbb{R}^n)$ 的同胚. 这样一来 g 便是从 M 到 $\mathbb{R}^n$ 的光滑嵌入. 这告诉我们, 应用点集拓扑学的有关知识, 将为证明 Whitney 嵌入定理提供一条有效途径.

定义 1.7.1 设 X 和 Y 是 Hausdorff 拓扑空间, $f: X \to Y$ 为连续映射. 如果 Y 中每一个紧致子集 K 的原像 $f^{-1}(K)$ 是 X 中的一个紧致子集, 则称 f 是**常态映射**.

命题 1.7.1 设 X 和 Y 是 Hausdorff 空间, 并且 Y 还是局部紧致的. 若 $f: X \to Y$ 是常态映射, 则 f 是闭映射.

证明 首先证明下列断言: S 是 Y 中闭集 $\Leftrightarrow$ 对 Y 的任意紧致子集 K, 交集 $S \bigcap K$ 是紧致的."$\Rightarrow$" 显然. 为证 "$\Leftarrow$", 需证 $Y - S$ 是 Y 中开集, 只要证: 对任意的 $y \in Y - S$, 存在点 y 的邻域 U, 使得 $U \bigcap S = \varnothing$.

因 Y 是局部紧致的, 故点 y 有一邻域 W, 使得 $\overline{W}$ 是紧致的. 显然 $y \notin \overline{W} \bigcap S$, 且 $\overline{W} \bigcap S$ 是紧致的因而是闭集, 所以存在点 y 的邻域 $U \subset W$, 使得 $U \bigcap (\overline{W} \bigcap S) = \varnothing$, 即 $U \bigcap S = \varnothing$.

现证 f 是闭映射. 设 F 是 X 的任意一个闭集, K 是 Y 的任意一个紧致集. 注意

$$f(F) \bigcap K = f(F \bigcap f^{-1}(K)).$$

因 f 是常态映射, 故 $f^{-1}(K)$ 及 $F \bigcap f^{-1}(K)$ 均为 X 中的紧致集. 又 f 是连续映射, 故 $f(F \bigcap f^{-1}(K)) = f(F) \bigcap K$ 是 Y 中紧致集. 根据上述断言, $f(F)$ 是 Y 中闭集. 这样便证明了 f 是闭映射.

问: 在微分流形 M 上, 是否存在常态映射呢?

命题 1.7.2 设 M 为 C^∞ 流形, 则对任意自然数 n, 存在 C^∞ 常态映射 $f: M \to \mathbb{R}^n$.

证明 首先讨论 $n = 1$ 的情形. 选取 M 的可数个局部坐标卡 (U_i, φ_i), 使得 $\mathcal{U} = \{U_i\}$ 是局部有限的开覆盖, 并且 $\varphi_i(U_i) = B_0(3), V_i = \varphi_i^{-1}(B_0(2)), W_i = \varphi_i^{-1}(B_0(1)), i = 1, 2, \cdots$, 又 $\mathcal{W} = \{W_i\}$ 也是 M 的开覆盖. 然后取 $\eta_i: M \to \mathbb{R}$ 为 C^∞ 函数, 使得当 $q \in \overline{W}_i$ 时, $\eta_i(q) = 1$; 当 $q \in V_i - \overline{W}_i$ 时, $0 < \eta_i(q) < 1$; 当 $q \in M - V_i$ 时, $\eta_i(q) = 0$. 定义 $\alpha: M \to \mathbb{R}$ 为 $\alpha(q) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} i\eta_i(q)$.

因为 $\mathcal{U}$ 是局部有限的, 因此对任意 $q \in M$, 必有点 q 的开邻域 N_q, 使得除有限个 U_i 外, $\eta_i|_{N_q} = 0$, 于是 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} i\eta_i$ 在局部是一个有限和, 从而 α 是 M 上的 C^∞ 函数. 下证 α 是常态函数.

任取 $\mathbb{R}$ 中的紧致集 K, 它是有界闭集, 不妨设 $K \subset [-l, l], l$ 为自然数, 因为

$$\alpha^{-1}(K) \subset \alpha^{-1}([-l, l]) \subset \bigcup_{j=1}^{l} \overline{W_j},$$

并且 $\bigcup_{j=1}^{l} \overline{W_j}$ 是 M 中紧致集, 所以它的闭子集 $\alpha^{-1}(K)$ 也是紧致的. 依定义, α 是常态函数.

其次, 对于 $n>1$, 利用下面的引理 1.7.2, 易见由

$$f(q) = (\alpha(q), \underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1\text{个}})$$

定义的映射 $f: M \to \mathbb{R}^n$ 是 C^∞ 常态映射.

引理 1.7.2 设 X 是 Hausdorff 空间, $f: X \to \mathbb{R}^n$ 是连续映射, $p_1: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是到第一个因子空间的投影映射. 若 $f_1 = p_1 \circ f$ 是常态映射, 则 f 也是常态映射.

证明 对于任意一个紧致集 $K \subset \mathbb{R}^n$, $p_1(K)$ 必为 $\mathbb{R}$ 中的紧致集, 因而是有界闭集. 不妨设 $p_1(K) \subset [a,b]$, 则 $K \subset p_1^{-1}([a,b])$ 并且

$$f^{-1}(K) \subset f^{-1}\left(p_1^{-1}([a,b])\right) = (p_1 \circ f)^{-1}([a,b]) = f_1^{-1}([a,b]).$$

因 $f_1: X \to \mathbb{R}$ 为常态映射, 故 $f_1^{-1}([a,b])$ 是 X 中的紧致集, 而 $f^{-1}(K)$ 作为它的闭子集必为紧致集.

引理 1.7.3 设 X 是 Hausdorff 空间, $f: X \to \mathbb{R}^n$ 是常态映射, $g: X \to \mathbb{R}^n$ 是连续映射. 如果对每一 $p \in X$, 有 $\|g(p) - f(p)\| \leqslant 1$, 那么 g 也是常态映射.

证明 $\mathbb{R}^n$ 中的任何紧致集 K 都是有界闭集, 可设 $K \subset \overline{B_0(r)}$ (以原点为中心, r 为半径的闭球). 由

$$\|f(p)\| \leqslant \|g(p)\| + 1, \quad \forall p \in X$$

可导出

$$g^{-1}(K) \subset g^{-1}(\overline{B_0(r)}) \subset f^{-1}(\overline{B_0(r+1)}),$$

于是 $g^{-1}(K)$ 作为紧致集 $f^{-1}(\overline{B_0(r+1)})$ 的闭子集是紧致集, 故 g 为常态映射.

定理 1.7.3 (Whitney 嵌入定理) 设 M 是 m 维光滑流形, $n \geqslant 2m+1$, 则存在从 M 到 $\mathbb{R}^n$ 的 C^∞ 嵌入映射 $f: M \to \mathbb{R}^n$, 使得 $f(M)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭子集.

证明 任取一个从 M 到 $\mathbb{R}^n$ 中的 C^∞ 常态映射 h. 根据定理 1.7.1, 存在浸入映射 $g: M \to \mathbb{R}^n$, 使得对每一 $p \in M$, $\|g(p) - h(p)\| < 1/2$. 根据定理 1.7.2, 又存在单一浸入 $f: M \to \mathbb{R}^n$, 使得对每一 $p \in M$, $\|f(p) - g(p)\| < 1/2$. 于是对每一 $p \in M$, $\|h(p) - f(p)\| < 1$, 依引理 1.7.3, $f: M \to \mathbb{R}^n$ 是常态映射. 再据命题 1.7.1, f 是闭映射, 因而它是从 M 到 $f(M) \subset \mathbb{R}^n$ 的同胚. 这说明 f 是一个光滑嵌入.

该定理说明 m 维光滑流形可光滑嵌入到 $\mathbb{R}^{2m+1}$ 中作为闭子集. Whitney 曾将它改进为 m 维 C^k 流形 $(k = 1, 2, \cdots, +\infty)$ 可 C^k 嵌入到 $\mathbb{R}^{2m}$ 中, 这里 $m > 0$. 此外, 若 $m > 1$, M 可 C^k 浸入到 $\mathbb{R}^{2m-1}$ 中 (见文献 [11, 12]).

1.8　横截正则性

反映所研究的对象横截相交或处于一般位置的最简单例子是观察向量空间 V 的两个子空间 V_1 与 V_2. 若它们的向量和为整个空间 V, 即 $V_1+V_2=V$, 则称 V_1 与 V_2 横截相交或说处于一般位置. 由于微分流形的切空间是向量空间, 切映射是切空间之间的线性映射, 所以可以定义两个子流形的横截性以及微分流形之间的可微映射与像空间中一子流形的横截性.

定义 1.8.1　设 M 和 N 为 C^∞ 流形, $L\subset N$ 为 N 的正则子流形, $f:M\to N$ 为 C^∞ 映射. 我们说 f 在点 $p\in M$ 与 L 相**横截**(记为 $f\pitchfork_p L$), 如果 $f(p)\notin L$, 或当 $f(p)\in L$ 时, 满足下列条件

$$(\mathrm{d}f)_p(T_pM)+T_{f(p)}L=T_{f(p)}N.$$

若 $A\subset M$, 且对任意 $a\in A$, 有 $f\pitchfork_a L$ 则称 f 在 A 上与 L**横截**, 记为 $f\pitchfork_A L$. 当 $A=M$ 时, 将 $f\pitchfork_M L$ 简记为 $f\pitchfork L$, 它表示 f 在 M 中的每一点都与 L 横截, 此时我们说 f 与 L**横截**或称 f 在 L 上是**横截正则映射**.

由定义易知: (1) 若 $f:M\to N$ 为淹没映射, 则对 N 的任意正则子流形 L, 均有 $f\pitchfork L$. (2) 若 N 中子流形 $L=\{q\}$ 为独点集 (视为 0 维子流形), 则 $f\pitchfork L$ 当且仅当 q 为 f 的正则值. 由此可见, 由 R. Thom 引入的横截性是正则性概念的延伸.

现假定 L 是 n 维光滑流形 N 的正则子流形, 其余维数为 k, 又 $q_0\in L$, 那么存在围绕点 q_0 的局部坐标系 $(\mathrm{Q},\psi;y_1,\cdots,y_n)$ 使得

$$\psi(\mathrm{Q}\bigcap L)=\psi(\mathrm{Q})\bigcap(\mathbb{R}^{n-k}\times\{0\}),$$

其中 $0\in\mathbb{R}^k$, 于是在 $\mathrm{Q}\bigcap L$ 上, $y_{n-k+1}=y_{n-k+2}=\cdots=y_n=0$. 用局部坐标, $\mathrm{Q}\bigcap L$ 表示为

$$\mathrm{Q}\bigcap L=\{q\in\mathrm{Q}\,|\,y_{n-k+1}(q)=y_{n-k+2}(q)=\cdots=y_n(q)=0\},$$

我们把 $(\mathrm{Q},\psi;y_1,\cdots,y_n)$ 称为围绕点 $q_0\in L$ 的**典范坐标系**.

命题 1.8.1　设 M 为 m 维光滑流形, N, L 如上所述, $f:M\to N$ 为光滑映射. 假定 $p\in f^{-1}(L)$, $(\mathrm{Q},\psi;y_1,\cdots,y_n)$ 为围绕点 $f(p)$ 的典范坐标系, 那么

$$f\pitchfork_p L\Leftrightarrow p\ 为\ \pi\circ\psi\circ f\ 的正则点,$$

这里 $\pi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ 是从乘积空间 $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{n-k}\times\mathbb{R}^k$ 到第二个因子空间 $\mathbb{R}^k$ 的投射.

证明　易见

$$f\pitchfork_p L\Leftrightarrow\psi\circ f\pitchfork_p(\mathbb{R}^{n-k}\times\{0\}),\tag{1}$$

而上式右边是说 $\mathrm{d}(\psi\circ f)_p(T_pM)$ 与 $\mathbb{R}^{n-k}\times\{0\}$ 张成 $\mathbb{R}^n=(\mathbb{R}^{n-k}\times\{0\})\oplus(\{0\}\times\mathbb{R}^k)$, 因此 (1) 式成立当且仅当 $\mathbb{R}^n$ 的线性子空间 $\mathrm{d}(\psi\circ f)_p(T_PM)$ 经投射 π 盖满 $\{0\}\times\mathbb{R}^k$, 因而 $\mathrm{Rank}_p(\pi\circ\psi\circ f)=k$, 从而

$$f\pitchfork_p L\Leftrightarrow \mathrm{Rank}_p(\pi\circ\psi\circ f)=k\Leftrightarrow p \text{ 为 } \pi\circ\psi\circ f \text{ 的正则点}.$$

定理 1.8.1 设 M, N 是维数分别为 m 和 n 的光滑流形, L 是 N 中余维数为 k 的正则子流形. 若光滑映射 $f:M\to N$ 与 L 横截, 则 $f^{-1}(L)$ 是 M 中余维数为 k 的正则子流形或为空集.

证明 假设 $f^{-1}(L)\neq\varnothing$, 取 $p\in f^{-1}(L)$. 设 $(\mathrm{Q},\psi;y_1,\cdots,y_n)$ 是围绕点 $f(p)$ 的典范坐标系, $\pi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k,(y_1,\cdots,y_n)\mapsto(y_{n-k+1},\cdots,y_n)$ 为投射, 则

$$\mathrm{Q}\bigcap L=\psi^{-1}\circ\pi^{-1}(0),\quad 0\in\mathbb{R}^k,$$

$$f^{-1}(\mathrm{Q}\bigcap L)=f^{-1}\circ\psi^{-1}\circ\pi^{-1}(0)=(\pi\circ\psi\circ f)^{-1}(0).$$

由于 $f\pitchfork L$, 因此

$$f\pitchfork_p L,p\in f^{-1}(L\bigcap \mathrm{Q})\Leftrightarrow \mathrm{Rank}_p(\pi\circ\psi\circ f)=k,$$

点 $0\in\mathbb{R}^k$ 是 $\pi\circ\psi\circ f$ 的正则值. 根据定理 1.5.1, $f^{-1}(\mathrm{Q}\bigcap L)=(\pi\circ\psi\circ f)^{-1}(0)$ 是 M 的正则子流形, 维数为 $m-k$. 由于点 $p\in f^{-1}(L)$ 是任取的, 所以 $f^{-1}(L)$ 是 M 中余维数为 k 的正则子流形 (图 1.13).

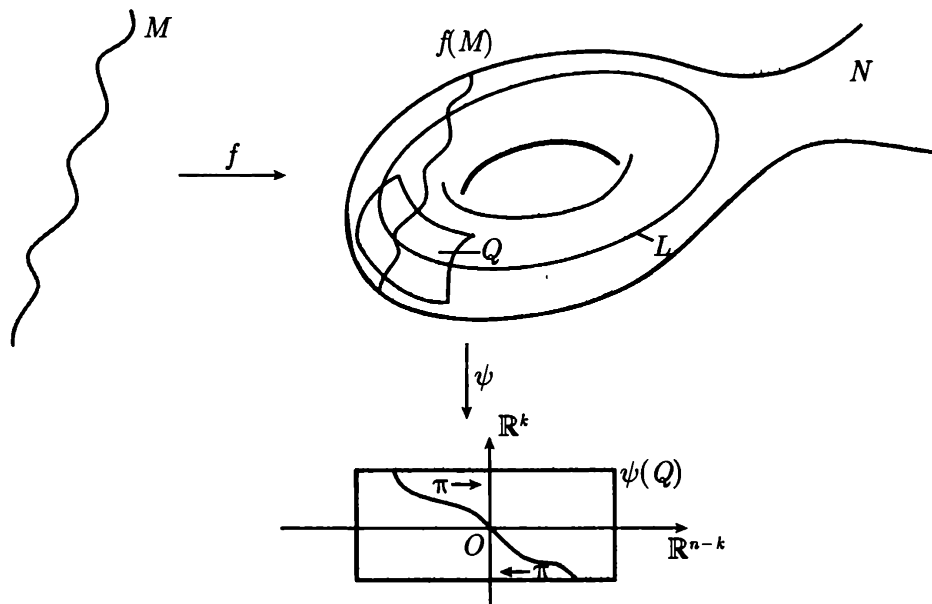


图 1.13

定理 1.8.2 设 M, N 分别是 m 维和 n 维光滑流形, L 是 N 中余维数为 k 的闭正则子流形, $A\subset M$ 为闭子集. 又设 $f:M\to N$ 为光滑映射且 $f\pitchfork_A L$. 令 $\delta:M\to\mathbb{R}$ 为正连续函数, 那么存在 C^∞ 映射 $g:M\to N$ 使得

(i) $g \pitchfork L$, 即 g 在 L 上是横截正则的,

(ii) g 是 f 的 δ- 逼近,

(iii) $f|_A = g|_A$.

证明方法类似于定理 1.7.1, 首先证明下面的引理.

引理 1.8.1　设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集, $f: U \to \mathbb{R}^n$ 为 C^∞ 映射, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $n \times m$ 矩阵 $A = (a_{ij})$ 和 $n \times 1$ 矩阵 $b = (b_i)$, 满足条件 $|A| = \max\limits_{i,j}\{|a_{ij}|\} < \varepsilon, |b_i| < \varepsilon\ (i = 1, \cdots, n)$, 并且使得 $g(x) = f(x) + Ax + b$ 以 $0 \in \mathbb{R}^n$ 为正则值.

证明　当 $m < n$ 时引理显然成立, 因为这时 $f(U)$ 具有零测度, 可选取 $A = 0$, b 尽量小, 又使得 0 不在 g 的像中, 从而 0 为 g 的正则值.

当 $m \geqslant n$ 时, 我们希望 $Dg(x) = Df(x) + A$ 的秩为 n, 其中 x 跑遍所有满足

$$g(x) = f(x) + Ax + b = 0$$

的点. 因此 A 属于 $Q - Df(x)$ 型, b 属于 $-f(x) - A \cdot x$ 型, 其中 Q 的秩为 n. 现定义

$$F_k: M(n, m; k) \times U \to M(n, m) \times \mathbb{R}^n,$$

$$F_k(Q, x) = (Q - Df(x), -f(x) - (Q - Df(x)) \cdot x).$$

F_k 显然是 C^∞ 的. 若 $k < n$, F_k 的定义域的维数 $k(n + m - k) + m \leqslant (n-1)(n + m - (n-1)) + m = n + nm - 1 < n + nm = \dim(M(n, m) \times \mathbb{R}^n)$, 因此,$F_k$ 的像 $\mathrm{Im}F_k$ 具有零测度, 所以对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 (A, b) 使得 $|a_{ij}| < \varepsilon, |b_i| < \varepsilon, i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots, m$, 且

$$(A, b) \notin \bigcup_{k=0}^{n-1} \mathrm{Im}F_k.$$

然后令 $g(x) = f(x) + Ax + b$, 则 $0 \in \mathbb{R}^n$ 是 g 的正则值 (留给读者验证).

定理 1.8.2 的证明　f 在一点处具有横截正则性必在该点的某开邻城内具有横截正则性, 因此由条件 $f \pitchfork_A L$ 可知, 存在 A 在 M 中的开邻城 U, 使得 $f \pitchfork_U L$.

对于 N 中的子流形 L, 选取可数个典范坐标系 $\{(Q_j, \psi_j) | j = 1, 2, \cdots\}$, 使得 $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} Q_j \supset L$, 那么 $\{N - L = Q_0, Q_j, j \geqslant 1\}$ 是 N 的开覆盖, $\{f^{-1}(Q_j) | j = 0, 1, 2, \cdots\}$ 与 $\{U, M - A\}$ 都是 M 的开覆盖, 设 $\{(U_i, \varphi_i) | i \in \mathbb{Z}\}$ 为这两个覆盖的开加细, 如命题 1.2.1 中所述, 对于 $i \geqslant 1, \varphi_i(U_i) = B_0(3), V_i = \varphi_i^{-1}(B_0(2)), W_i = \varphi_i^{-1}(B_0(1)), \{W_i\}$ 覆盖 M.$\{U_i\}$ 是局部有限族, 这些 U_i 用整数 i 标号, 并且 $i \leqslant 0 \Leftrightarrow U_i \subset U$ 或 $U_i \subset f^{-1}(Q_0) = f^{-1}(N - L)$. 而对于每一个 $i \geqslant 1$, 选 $j(i) > 0$, 使得 $f(U_i) \subset Q_{j(i)}$.

设 $\xi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为 C^∞ 函数, 使得当 $x \in \overline{B_0(1)}$ 时, $\xi(x) = 1$; 当 $x \in B_0(2) - \overline{B_0(1)}$ 时, $0 < \xi(x) < 1$; 当 $x \in \mathbb{R}^m - B_0(2)$ 时, $\xi(x) = 0$. 对于 $i \geqslant 1$, 令 $\lambda_i: M \to \mathbb{R}$ 定

义为

$$\lambda_i(p)=\begin{cases}\xi(\varphi_i(p)), & p\in U_i,\\ 0, & p\in M-U_i.\end{cases}$$

现归纳地构作一列光滑映射 $\{g_k: M\to N\}$ 如下. 令 $g_0=f$. 设 g_{k-1} 已确定, 它在 $g_{k-1}^{-1}(L)\bigcap\left(\bigcup\limits_{j<k}\overline{W_j}\right)$ 中的每一点处都满足横截正则性条件, 并且对每一个 $i\geqslant 1$, 有 $g_{k-1}(\overline{V_i})\subset \mathrm{Q}_{j(i)}$. 令 $j=j(k)$, 特别地有 $g_{k-1}(\overline{V_k})\subset \mathrm{Q}_j$.

考虑 $\pi\circ\psi_j\circ g_{k-1}\circ\varphi_k^{-1}: B_0(3)\to\mathbb{R}^k$, 其中 $\pi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k, \pi(y_1,\cdots,y_{n-k+1},\cdots,y_n)=(y_{n-k+1},\cdots,y_n)$. 根据引理 1.8.1, 存在任意小的仿射映射 $a(x)=Bx+b$ 使得 $\pi\circ\psi_j\circ g_{k-1}\circ\varphi_k^{-1}+a: B_0(3)\to\mathbb{R}^k$ 以 $0\in\mathbb{R}^k$ 为正则值. 将 $\mathbb{R}^k$ 视为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 $\{0\}\times\mathbb{R}^k$, 定义 $g_k: M\to N$ 为

$$g_k(p)=\begin{cases}\psi_j^{-1}(\psi_j\circ g_{k-1}(p)+a(\varphi_k(p))\lambda_k(p)), & p\in\overline{V_k},\\ g_{k-1}(p), & p\in M-\overline{V_k}.\end{cases}$$

此处 a 待定. 首先应当使 $B\in M(k,m), b\in\mathbb{R}^k$ 因而 a 取得足够小, 满足如下要求: (i) 对于 $p\in\overline{V_k}, \psi_j(g_{k-1}(p))+a(\varphi_k(p))\cdot\lambda_k(p)\in\psi_j(\mathrm{Q}_j)$, (ii) g_k 是 g_{k-1} 的 $\delta/2^k$-逼近, (iii) 对 $i\geqslant 1, g_k(\overline{V_i})\subset\mathrm{Q}_{j(i)}$. 这是可能的, 因为只有有限个 $\overline{V_i}$ 与 $\overline{V_k}$ 相交.

上面已证得 g_k 在 $g_k^{-1}(L)\bigcap\overline{W_k}$ 的每一点处都满足横截正则性条件, 希望取 a 足够小, 使得在 $g_k^{-1}(L)\bigcap\left(\bigcup\limits_{j<k}\overline{W_j}\right)$ 的每一点处都满足这一条件. 为此考虑这一集合与 $\overline{V_k}$ 的交即可. 将这个交集记为 K, 并考察映射

$$(p,a)\mapsto G(p,a)=(g_k(p), D(\pi\circ\psi_j\circ g_k\circ\varphi_k^{-1})(\varphi_k(p)))\in N\times M(k,m),$$

其中 $p\in K$. 映射 G 是连续的, 它将 $K\times\{0\}$ 映到 $N\times M(k,m)$ 的开子集

$$[(N-L)\times M(k,m)]\bigcup[N\times M(k,m;k)]$$

中, 因此当 a 充分小时, $G(p,a)$ 必属于上述开子集, 其中 $p\in K$. 从而 g_k 在 $g_k^{-1}(L)\bigcap\left(\bigcup\limits_{j\leqslant k}\overline{W_j}\right)$ 的每一点处满足横截正则性条件.

如前面所做的那样, 令 $g(p)=\lim\limits_{k\to+\infty}g_k(p)$, 则 $g: M\to N$ 为定理中满足 (i), (ii), (iii) 的 C^∞ 映射.

本定理说明与子流形 L 横截的映射 $g: M\to N$ 组成的集在所有的光滑映射 $f: M\to N$ 组成的空间中处处稠密, 即在任意光滑映射 f 的任意邻域中, 存在与 L

横截的映射. 在这个意义上, 横截正则映射是一种 “典型” 的映射. 通过对给定的光滑映射的一个任意小的扰动 (在光滑映射类中) 而使它处于 “一般位置”, 即成为横截正则映射. 横截正则性的概念容许我们引入横截相交子流形的概念.

定义 1.8.2　设 L 和 P 是光滑流形 N 的两个正则子流形. 如果包含映射 $i_P : P \to N$ 横截于 L, 则称 P 与 L 在 N 中是**横截相交**的, 或说 P 和 L 在 N 中**处于一般位置**.

横截相交关系是对称的. 在上述定义中可以用包含关系 $i_L : L \to N$ 替代 i_P, 留给读者证之. 另外, 我们还可用下列方式等价地定义.

如果 $P\bigcap L \neq \varnothing$, 则对每一 $q \in P\bigcap L$, 有

$$T_qL + T_qP = T_qN,$$

即在交 $P\bigcap L$ 中的每一点 q 处, 切空间 T_qL 和 T_qP 张成整个 T_qN, 则称 P 和 L**横截相交**.

由定理 1.8.1 知, 若 $P\bigcap L \neq \varnothing$, 则 $P\bigcap L = i_P^{-1}(L)$ 为 P 的正则子流形, 维数为 $\dim P + \dim L - \dim N$.

在光滑映射的横截性理论中, 下列含参数的横截性定理很有用, 更多的内容可参看文献 [10, 13].

定理 1.8.3　设 Λ, M, N 和 L 是光滑流形, 且 $L \subset N$ 是 N 的正则子流形, 并设 $F : \Lambda \times M \to N$ 是光滑映射. 如果 $F \pitchfork L$, 那么对于几乎所有的 $\lambda \in \Lambda$ (即对 Λ 中除去一个零测度集外的所有 λ), 由式 $F_\lambda(p) = F(\lambda, p), p \in M$ 定义的映射 $F_\lambda : M \to N$ 皆与 L 横截, 即 $F_\lambda \pitchfork L$.

证明留作习题. 我们把流形 Λ 视为 “参数流形”, F 看做由 C^∞ 映射 F_λ 组成的光滑映射族 $\{F_\lambda\}$, 它以 $\lambda \in \Lambda$ 为参数. 本定理说明可以将最初的映射 $F_{\lambda_0} : M \to N$ 变为一般位置.

作为本节的结尾, 最后谈谈映射的逼近, 因为定理 1.8.2 以及上一节几个定理都涉及到它. 当谈到两个光滑映射 f 和 g 接近时, 我们仅考虑它们相应的映射值彼此接近, 即考虑在连续 (C^0) 意义下 g 逼近 f. 还可以进一步提出要求, 要求 f 和 g 的所有对应的一阶偏导数彼此也接近, 甚至要求 f 和 g 的从一阶直到 r 阶的所有对应的偏导数彼此接近, 为此必须对所有 C^r 映射组成的映射空间 $C^r(M, N)$ 引入 Whitney C^r 拓扑 (又称 C^r 强拓扑), 以便讨论 C^r 意义下映射的逼近 (见文献 [11] 或 [14]). 如果对于 C^∞ 映射 f 和 g, 考虑它们的各阶对应的导数彼此接近, 需对映射空间 $C^\infty(M, N)$ 赋予 Whitney C^∞ 拓扑 (又称 C^∞ 强拓扑). 这样一来, 上一节 Whitney 浸入与嵌入定理以及本节 Thom 横截性定理中关于映射的逼近要求还可进一步加强, 表述得更为精确 (例如参见文献 [14]).

习 题 1

1. 设 $\mathcal{A}_0$ 是 n 维流形 M 的一个局部坐标卡集, 满足下列条件;

1) $\mathcal{A}_0$ 中的所有坐标域构成 M 的一个开覆盖;

2) 属于 $\mathcal{A}_0$ 的任意两个局部坐标卡是 C^r- 相容的.

证明: 若 M 的两个局部坐标系 (U,φ) 和 (V,ψ) 与 $\mathcal{A}_0$ 中每一个成员都是 C^r- 相容的, 则 (U,φ) 和 (V,ψ) 是 C^r- 相容的.

2. 设 $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2-y^2=1\}$, 证明两个局部坐标卡 $\varphi_\pm:\{(x,y)\in S|\pm x>0\}\to\mathbb{R},\varphi_\pm(x,y)=y$ 定义了非连通集 S 上的一个流形结构.

3. 证明 $M=\{(x,f(x))|f(x)=|x|\}$ 不能成为 $\mathbb{R}^2$ 的 C^r- 子流形 $(r\geqslant 1)$.

4. 设 A, B 分别是微分流形 M 和 N 的正则子流形, 证明: $A\times B$ 是 $M\times N$ 的正则子流形.

5. 设 $(M_1,\mathcal{D}_1)$ 和 $(M_2,\mathcal{D}_2)$ 是 C^∞ 流形 $(M,\mathcal{D})$ 的两个 C^∞ 正则子流形. 如果 $M_1=M_2$, 则 $\mathcal{D}_1=\mathcal{D}_2$. 对非正则子流形结论是否成立?

6. 设 M 为 C^∞ 流形, A 和 B 为 M 的闭子集, $A\bigcap B=\varnothing$. 试证存在 $\psi\in C^\infty(M)$, 满足

1) $0\leqslant\psi(p)\leqslant 1,\forall p\in M$;

2) $\psi(p)=\begin{cases}0, & \forall p\in A,\\ 1, & \forall p\in B.\end{cases}$

7. 设 U 和 V 是微分流形 M 的开子集, $M=U\bigcup V$, 求证存在光滑函数 $f:M\to\mathbb{R}$ 和 $g:M\to\mathbb{R}$, 使得 $\mathrm{Supp}(g)\subset U,\mathrm{Supp}(f)\subset V$, 并且 $f+g=1$.

8. 设 M 是 C^∞ 流形, $\{K_i\}$ 是 M 的一个紧致集族, $\{V_i\}$ 是 M 的一个局部有限的开集族, $K_i\subset V_i,i=1,2,\cdots$, 并且 $\bigcup\limits_i K_i=M$, 则对任意给定的一族正实数 $\{\varepsilon_i\}$, 存在光滑函数 $\varepsilon:M\to\mathbb{R}$, 适合条件

$$0<\varepsilon(p)\leqslant\varepsilon_i,\quad\forall p\in K_i,i=1,2,\cdots.$$

9. 设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集, 试证存在 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 适合条件:

1) $f(x)\geqslant 0,\forall x\in\mathbb{R}^n$;

2) $f^{-1}(0)=A$.

10. 设映射 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 定义为

$$y_1=x_1\mathrm{e}^{x_2}+x_2,\quad y_2=x_1\mathrm{e}^{x_2}-x_2,$$

证明 f 是光滑同胚, 并求切映射 $\mathrm{d}f$ 和余切映射 f^* 在自然基底下的矩阵.

11. 设映射 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ 和 $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ 分别定义为:

$$f(x)=(\mathrm{e}^{2x_1+x_2},3x_2-\cos x_1,x_1^2+x_2+2),$$

$$g(y)=(3y_1+2y_2+y_3^2,y_1^2-y_3+1),$$

求 $\mathrm{d}(g\circ f)_0$ 及 $\mathrm{d}(f\circ g)_0$.

12. 设 M 是紧致光滑流形, $f: M \to \mathbb{R}$ 是光滑函数, 证明: 在 M 上至少存在两个点 p 和 q, 使得 $(\mathrm{d}f)_p$ 和 $(\mathrm{d}f)_q$ 都是零映射.

13. 设 M 是 m 维紧致光滑流形, $f: M \to \mathbb{R}^m$ 是光滑映射, 证明: 在 M 上至少存在一点 p, 使得 $(\mathrm{d}f)_p$ 的秩小于 m.

14. 证明: 如果 $\psi: M \to N$ 是光滑的单一满映射, 并且 $\mathrm{d}\psi$ 的核处处为 0, 那么 ψ 是一个微分同胚.

15. 在 n 维球面 $S^n = \left\{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2} = 1\right\}$ 上定义 $f: S^n \to \mathbb{R}$ 为 $f(x_1, \cdots, x_{n+1}) = x_{n+1}$, 证明 $p_S(0, \cdots 0, -1)$ 和 $P_N(0, \cdots, 0, 1)$ 为 f 的非退化临界点, 指数分别为 0 和 n.

16. 设 U 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集, $f \in C^\infty(U)$, 则存在长度可任意小的向量 $b \in \mathbb{R}^m$, 使得函数 $g(x) = f(x) - b \cdot x$ 在 U 上没有退化临界点, 其中 $b \cdot x$ 表示向量 b 与向量 x 的数量积.

17. 设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 的正则子流形, $f \in C^\infty(M)$, 试证几乎所有的 $u \in \mathbb{R}^n$ 都使得如下定义的 g 的所有临界点都是非退化的, 这里 $g: M \to \mathbb{R}$ 定义为 $x \mapsto f(x) + u \cdot x$, 其中 $u \cdot x$ 表示向量 u 与向量 x 的数量积.

18. 设 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 定义为 $f(x, y) = x^3 + xy + y^3 + 1$. 对于点 $p(0,0), p\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $f^{-1}(f(p))$ 是否为 $\mathbb{R}^2$ 的一个子流形或嵌入子流形?

19. 利用由 $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (2x_1x_2 - x_6^2, 2x_2x_3 - x_4^2, 2x_3x_1 - x_5^2, x_4x_5 - \sqrt{2}x_3x_6, x_5x_6 - \sqrt{2}x_1x_4, x_4x_6 - \sqrt{2}x_2x_5)$ 定义的映射 $F: \mathbb{R}^6 - \{0\} \to \mathbb{R}^6$, 证明 $\{(x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}zx, \sqrt{2}xy) \in \mathbb{R}^6 | x, y, z \in \mathbb{R}\}$ 是 $\mathbb{R}^6$ 的一个子流形.

20. 设 (M, φ) 是 N 的嵌入子流形, 且 $\varphi(M)$ 是 N 中的闭子集. 证明对任意 $f \in C^\infty(M)$, 必存在 $g \in C^\infty(N)$ 使得 $g \circ \varphi = f$.

21. 设 $F: M \to N$ 是从流形 M 到流形 N 的嵌入映射, 则 $F(M)$ 是 N 的正则子流形.

22. 设 (M_i, f_i) 是 N_i 的嵌入子流形, $i = 1, 2$, 证明 $(M_1 \times M_2, f)$ 是 $N_1 \times N_2$ 的嵌入子流形, 其中 $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2)), (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$.

23. 设 $m < n, \pi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是投影, 即 $\pi(y_1, \cdots, y_n) = (y_1, \cdots, y_m)$. 又设 $\varphi: M \to \mathbb{R}^n$ 是光滑映射, 证明: 如果 $\pi \circ \varphi: M \to \mathbb{R}^m$ 是浸入, 那么 $\varphi: M \to \mathbb{R}^n$ 也是浸入.

24. 设 X, Y 和 Z 是微分流形, $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 是可微映射, 试证:

1) 如果 $g \circ f$ 是浸入映射, 那么 f 也是浸入映射;

2) 如果 $g \circ f$ 是淹没映射, 并且 f 是满射, 那么 g 也是淹没映射.

25. 设 (M, φ) 是 N 的子流形, 并且 $\dim M = \dim N$, 证明: 将 M 的微分结构经过 φ 移植到 $\varphi(M)$ 之后, $\varphi(M)$ 是 N 的开子流形.

26. 设 $x_{n+1} = f(x_1, \cdots, x_n)$ 关于 $x_i (i = 1, \cdots, n)$ 有 r 阶连续偏导数, 证明: 超曲面 $x_{n+1} = f(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的 n 维 C^r 正则子流形.

27. 证明: 环面 $T^2: (x, y, z) = ((b + a\cos\theta)\cos\varphi, (b + a\cos\theta)\sin\varphi, a\sin\theta)$, $(0 < a < b)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的 2- 维正则子流形.

28. 设 M, N 为微分流形, $f: M \to N$ 为光滑映射. 如果对每一 $p \in M$, $\mathrm{Rank}_p f = k$ (定值), 则对每一 $q \in f(M), f^{-1}(q)$ 是 M 中余维数为 k 的正则子流形, 并且对任意 $p \in f^{-1}(q), T_p(f^{-1}(q)) = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{d}f)_p$.

29. 设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 定义为 $f(t) = (t, t^2)$, L 是 $\mathbb{R}^2$ 中的 x 轴, 问 f 与 L 横截否? 若将 f 改为 $f(t) = (t, t^2 - 1)$ 呢?

30. 设 $f: M \to \mathbb{R}^k$ 是微分流形 M 到 $\mathbb{R}^k$ 的光滑映射, N 是 $\mathbb{R}^k$ 的正则子流形, 求证: 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $v \in \mathbb{R}^k$, $\|v\| < \varepsilon$, 使得由 $p \mapsto f(p) + v, p \in M$ 定义的映射 $g: M \to \mathbb{R}^k$ 与 N 横截.

31. 设 M, N 和 L 都是微分流形, W 是 L 的正则子流形, 且 $f: M \to N$ 和 $g: N \to L$ 都是光滑映射, 并且 g 与 W 横截. 求证: f 与 $g^{-1}(W)$ 横截当且仅当 $g \circ f$ 与 W 横截.

32. 证明定理 1.8.3.

33. 试应用 Whitney 嵌入定理证明: 任何光滑流形都可赋予度量使之成为一个完备的度量空间.

第 2 章　流形上的微分学

多元函数微分学的一个基本概念是导数, 更精确地说是方向导数. 把它应用到一般的微分流形 M 上去, 选定一点 $p_0 \in M$, 取一个切向量 $X_{p_0} \in T_{p_0}M$, 将它看成是一个算子作用于函数 f 就得到一个数 $X_{p_0}f$, 即 f 在点 p_0 沿 X_{p_0} 的导数. 如果对于 M 的每个点 p, 选定一个方向 $X_p \in T_pM$, 便定义了 M 上的一个切向量场 X, 它是 M 的切丛 TM 的截面, 2.1 节讨论的切丛和余切丛是一般向量丛的重要特例. 研究向量场的几何自然会讨论向量场的积分曲线, 求积分曲线就是求解某种类型的常微分方程组的解曲线. 而积分曲线的最重要性质是它的 "群性质", 因此 2.2 节引出流与单参数变换群的概念. 从局部来看, 可以把一个向量场的诸积分曲线拉直, 作为推广, 能否把一族向量场 $X_1, \cdots, X_n$ 的积分曲线同时拉直呢? 2.3 节介绍的 Frobenius 定理给出了深刻的回答. 2.6 节介绍的李 (Lie) 导数使我们知道向量场与微分形式 (以及更一般的混合张量场) 可以对给定的向量场进行微分运算. 然而在流形上人们最常遇到的是外微分形式, 它自然地出现在几何与分析、力学和物理学等学科里. 作为准备, 2.4 节讨论向量空间上的外代数, 2.5 节对流形上的外微分形式给出定义后, 引进了重要的外微分运算, 阐述支配它的运算法则. 而对外微分形式是闭的还是恰当的加以区分, 比较闭形式群与恰当形式群之间的差异程度可导入流形的 de Rham 上同调群概念, 2.7 节陈述的 de Rham 定理告诉我们, de Rham 上同调群不仅是微分同胚意义下的不变量, 由流形的微分结构所决定, 而且它还是拓扑不变量. 本章的内容在本书中也是最基本的.

2.1　切丛和余切丛

2.1.1　切丛

给定一个流形 M. 对于每个点 $p \in M$, 可以联系它的切空间 T_pM. 现在考虑所有这样的切空间的不交并 TM, 问能否赋予拓扑结构与微分结构, 使之成为微分流形呢?

设 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_m)$ 是 m 维微分流形 M 的一个坐标卡, $p \in U$. 切向量 $X \in T_pM$ 可以表为 $X = \sum_{i=1}^{m} a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$, 其中 $a_i = \mathrm{d}x_i(X)$. 令 $\theta_p : T_pM \to \mathbb{R}^m$ 定义为

$$\theta_p(X) = \theta_p\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right) = (a_1, \cdots, a_m), \tag{1}$$

显然 θ_p 是向量空间 T_pM 与 $\mathbb{R}^m$ 之间的一个同构. 假定 $(V, \psi; y_1, \cdots, y_m)$ 是围绕点 p 的另一个坐标卡, 并设 $\eta_p : T_pM \to \mathbb{R}^m$ 是与坐标卡 (V, ψ) 相关联的类似于 θ_p 的同构映射, 易见

$$\eta_p \circ \theta_p^{-1} = \mathrm{d}(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)). \tag{2}$$

定理 2.1.1 设 M 是 m 维光滑流形, 带有微分结构 $\mathcal{D}$, 则

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

可以赋予流形结构, 使之成为一个 $2m$ 维光滑流形. 这个流形称为 M 的**切丛**.

证明 首先定义自然投影 $\pi : TM \to M$ 如下: 设 $X \in TM$, 则 $X \in T_pM$ 对于某个唯一的 $p \in M$. 令 $\pi(X) = p$, 于是在点 p 处的纤维 $\pi^{-1}(\{p\}) = T_pM$ 具有 m 维实向量空间结构.

设 $(U, \varphi) \in \mathcal{D}$, 其坐标函数为 $x_1, \cdots, x_m$. 定义

$$\tau_\varphi : \pi^{-1}(U) = \bigcup_{p \in U} T_pM \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

如下: 对 $X \in \pi^{-1}(U)$, 令

$$\begin{aligned}\tau_\varphi(X) &= (\varphi(\pi(X)), \theta_{\pi(X)}(X)) \\ &= (x_1(\pi(X)), \cdots, x_m(\pi(X)), \mathrm{d}x_1(X), \cdots, \mathrm{d}x_m(X)).\end{aligned}$$

由于 $\pi : TM \to M$ 是满射, 并且局部坐标域 U 的全体覆盖 M, 因此 $\{\pi^{-1}(U) | (U, \varphi) \in \mathcal{D}\}$ 覆盖 TM. 而 $\theta_{\pi(\cdot)}$ 及 φ 都是单射, 故 $\tau_\varphi = (\varphi \circ \pi, \theta_{\pi(\cdot)})$ 是单射. 又 $\tau_\varphi(\pi^{-1}(U)) = \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$, 所以 τ_φ 是到 $\mathbb{R}^{2m}$ 的开子集 $\varphi(U) \times \mathbb{R}^m$ 上的双射. 将 $\varphi(U) \times \mathbb{R}^m$ 的各开子集在 τ_φ 下的原像取作 TM 的拓扑基成员, 因而集族

$$\{\tau_\varphi^{-1}(W) | W \text{为} \varphi(U) \times \mathbb{R}^m \text{中的开集}, (U, \varphi) \in \mathcal{D}\}$$

形成 TM 的拓扑基. 于是每一 $\tau_\varphi : \pi^{-1}(U) \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$ 是拓扑同胚, TM 成为一个有可数拓扑基且局部欧氏化的 Hausdorff 空间. 例如就 TM 是 Hausdorff 空间证明如下. 给定不同的 $X_1, X_2 \in TM$, 分两种情形讨论:

(1) $X_1 \in T_{p_1}M, X_2 \in T_{p_2}M, p_1 \neq p_2$. 因 M 是 T_2 空间, 故存在围绕点 p_i 的坐标卡 (U_i, φ_i), $i = 1, 2$, 使得 $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, 于是 $\pi^{-1}(U_1)$ 和 $\pi^{-1}(U_2)$ 将是 TM 中分别包含 X_1 和 X_2 的不交开集;

(2) $\pi(X_1) = \pi(X_2) = p$. 设 (U,φ) 是围绕点 p 的坐标卡. 因 $X_1 \neq X_2$, 故 $\theta_p(X_1) \neq \theta_p(X_2)$. 而 $\theta_p(X_1)$ 和 $\theta_p(X_2)$ 都属于 $\mathbb{R}^m$, 所以存在 $\mathbb{R}^m$ 中分别包含 $\theta_p(X_1)$ 和 $\theta_p(X_2)$ 的不交开集 V_1 和 V_2, 从而 $\tau_\varphi^{-1}(\varphi(U)\times V_1)$ 和 $\tau_\varphi^{-1}(\varphi(U)\times V_2)$ 是 TM 中分别包含 X_1 和 X_2 的不交开集.

由上面的讨论可知 TM 是一个 $2m$ 维拓扑流形, 下面讨论微分结构. 选取 TM 的坐标卡集的任意两个成员 $(\pi^{-1}(U),\tau_\varphi)$ 和 $(\pi^{-1}(V),\tau_\psi)$, 它们分别对应于 M 的两个坐标卡 (U,φ) 和 (V,ψ). 需证

$$\tau_\psi\circ\tau_\varphi^{-1}:\tau_\varphi(\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(V))\to\tau_\psi(\pi^{-1}(U)\cap\pi^{-1}(V))$$

是 C^∞ 映射, 即证它是从 $\varphi(U\cap V)\times\mathbb{R}^m$ 到 $\psi(U\cap V)\times\mathbb{R}^m$ 的 C^∞ 映射. 由 (2) 式知,

$$\tau_\psi\circ\tau_\varphi^{-1} = (\psi\circ\varphi^{-1},\eta\circ\theta^{-1}) = (\psi\circ\varphi^{-1},\mathrm{d}(\psi\circ\varphi^{-1})).$$

由于 $\psi\circ\varphi^{-1}\in C^\infty$, 因此 $\tau_\psi\circ\tau_\varphi^{-1}\in C^\infty$. 设 $\mathcal{D}'$ 是包含

$$\{(\pi^{-1}(U),\tau_\varphi)|(U,\varphi)\in\mathcal{D}\}$$

且满足相容性条件的极大集族, 则 $\mathcal{D}'$ 是 TM 的微分结构. TM 赋予微分结构 $\mathcal{D}'$ 成为一个 $2m$ 维光滑流形. TM 的成员有时写为 (p,X), 其中 $p\in M, X\in T_pM$.

现在设 M, N 分别是维数为 m 和 n 的微分流形, $f:M\to N$ 是光滑映射. 定义从切丛 TM 到 TN 的切映射 $\mathrm{d}f$ 为: 对任意 $p\in M$, 在 T_pM 上, $\mathrm{d}f=(\mathrm{d}f)_p$.

命题 2.1.1　设 $f:M\to N$ 为光滑映射, 则 $\mathrm{d}f:TM\to TN$ 亦为光滑映射.

证明　任取 $z\in TM$, 依定义 1. 1. 4, 需证存在 TM 的一个围绕 z 的坐标卡 $(\pi^{-1}(U),\tau_\varphi)$ 和 TN 的一个围绕 $\mathrm{d}f(z)$ 的坐标卡 $(\pi^{-1}(V),\tau_\psi)$, 使得 $\mathrm{d}f(\pi^{-1}(U))\subset\pi^{-1}(V)$, 并且定义在开集 $\tau_\varphi(\pi^{-1}(U))$ 上的 $\tau_\psi\circ\mathrm{d}f\circ\tau_\varphi^{-1}$ 是一个 C^∞ 映射. 这里我们把从 TM 到 M 上和从 TN 到 N 上的两个自然投影都记为 π.

设 $\pi(z)=p$, 则 $z\in T_pM$, $\mathrm{d}f(z)=(\mathrm{d}f)_p(z)\in T_{f(p)}N$. 因 f 是 C^∞ 映射, 故存在 M 在点 p 的一个坐标卡 (U,φ) 和 N 在点 $q=f(p)$ 的一个坐标卡 (V,ψ), 使得 $f(U)\subset V$ 并且 $\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ 是 C^∞ 映射. 现在考虑 TM 在 z 的坐标卡 $(\pi^{-1}(U),\tau_\varphi)$ 和 TN 在 $(\mathrm{d}f)(z)$ 的坐标卡 $(\pi^{-1}(V),\tau_\psi)$, 首先我们断言:$\mathrm{d}f(\pi^{-1}(U))\subset\pi^{-1}(V)$. 事实上, 如果 $u\in\pi^{-1}(U)$, 那么 u 是 M 在 U 的一个点 $p_0=\pi(u)$ 处的切向量, 于是 $(\mathrm{d}f)(u)=(\mathrm{d}f)_{p_0}(u)\in T_{f(p_0)}N$. 由于 $f(p_0)\in V$, 因此 $\mathrm{d}f(u)\in\pi^{-1}(V)$.

另外, 由下面左图的交换性可推出下面右图的交换性

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\quad f\quad} & V \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\psi \\ \varphi(U) & \xrightarrow[\psi\circ f\circ\varphi^{-1}]{} & \psi(V) \end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc} T_pM & \xrightarrow{\quad (\mathrm{d}f)_p\quad} & T_{f(p)}N \\ \theta_p\downarrow & & \downarrow\eta_{f(p)} \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow[\mathrm{d}(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})_{\varphi(p)}]{} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

因而 $(\mathrm{d}f)_p=\eta_{f(p)}^{-1}\circ\mathrm{d}(\psi\circ f\circ\varphi^{-1})_{(\varphi(p))}\circ\theta_p$. 又 $\tau_\varphi=(\varphi\circ\pi,\theta_{\pi(\cdot)}),\tau_\psi=(\psi\circ\pi,\eta_{\pi(\cdot)})$, 故可推出 $\tau_\psi\circ\mathrm{d}f\circ\tau_\varphi^{-1}=(\psi\circ f\circ\varphi^{-1},\mathrm{d}(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}))$ 是 C^∞ 映射.

2.1.2 余切丛

设 $(M,\mathcal{D})$ 为 m 维光滑流形, 令

$$T^*M=\bigcup_{p\in M}T_p^*M.$$

定义从 T^*M 到 M 上的自然投影 $\pi':T^*M\to M$ 如下: 若 $\omega\in T_p^*M$, 则 $\pi'(\omega)=p$.

假设 $(U,\varphi;x_1,\cdots,x_m)\in\mathcal{D}$, 定义

$$\tau'_\varphi:(\pi')^{-1}(U)=\bigcup_{p\in U}T_p^*M\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$$

如下: 对 $\omega\in(\pi')^{-1}(U)$, 令

$$\tau'_\varphi(\omega)=\left(x_1(\pi'(\omega)),\cdots,x_m(\pi'(\omega)),\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right),\cdots,\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)\right).$$

易见 $\tau'_\varphi((\pi')^{-1}(U))=\varphi(U)\times\mathbb{R}^m$, τ'_φ 是到 $\mathbb{R}^{2m}$ 中的开子集 $\varphi(U)\times\mathbb{R}^m$ 上的双射.

采用对于切丛 TM 的同样手法, 赋予 T^*M 拓扑结构与微分结构, 把 T^*M 构建为一个流形, 称为 M 的**余切丛**(细节请读者补述).

将切丛与余切丛的构造进一步抽象化, 在微分流形 M 的每一点配上一个适当的向量空间以形成向量丛, 它的一个显著特点是局部为积流形, 形如 $U\times\mathbb{R}^k$(U 为 M 的坐标域), 因此向量丛又可视为积流形的推广.

2.1.3 向量丛的概念

定义 2.1.1 设 E,M 是两个光滑流形, $\pi:E\to M$ 是映上的光滑映射, $\mathbb{R}^k$ 为 k 维实向量空间. 若下列条件 (1)、(2) 成立, 则称 (E,M,π) 为流形 M 上的 k 维 C^∞**实向量丛**, 并称 E 为**全空间**, M 为**底空间**, π 为**丛投影**, $\mathbb{R}^k$ 为**纤维型**. 条件 (1) 和 (2) 如下:

(1) 对任意 $p\in M$, 集合 $E_p=\pi^{-1}(p)$ 具有 k 维实向量空间结构, 称为点 p 上的**纤维**;

(2) 存在 M 的开覆盖 $\mathcal{U}$, 并且对每一个 $U\in\mathcal{U}$, 存在 C^∞ 微分同胚

$$\varphi_U:\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^k$$

使得

(i) $p_1\circ\varphi_U=\pi$, 其中 $p_1:U\times\mathbb{R}^k\to U$ 表投影,

(ii) 对任意 $p \in U$, 映射 $\varphi_{U,p} = \varphi_U|_{E_p} : E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k$ 是向量空间之间的同构 (图 2.1).

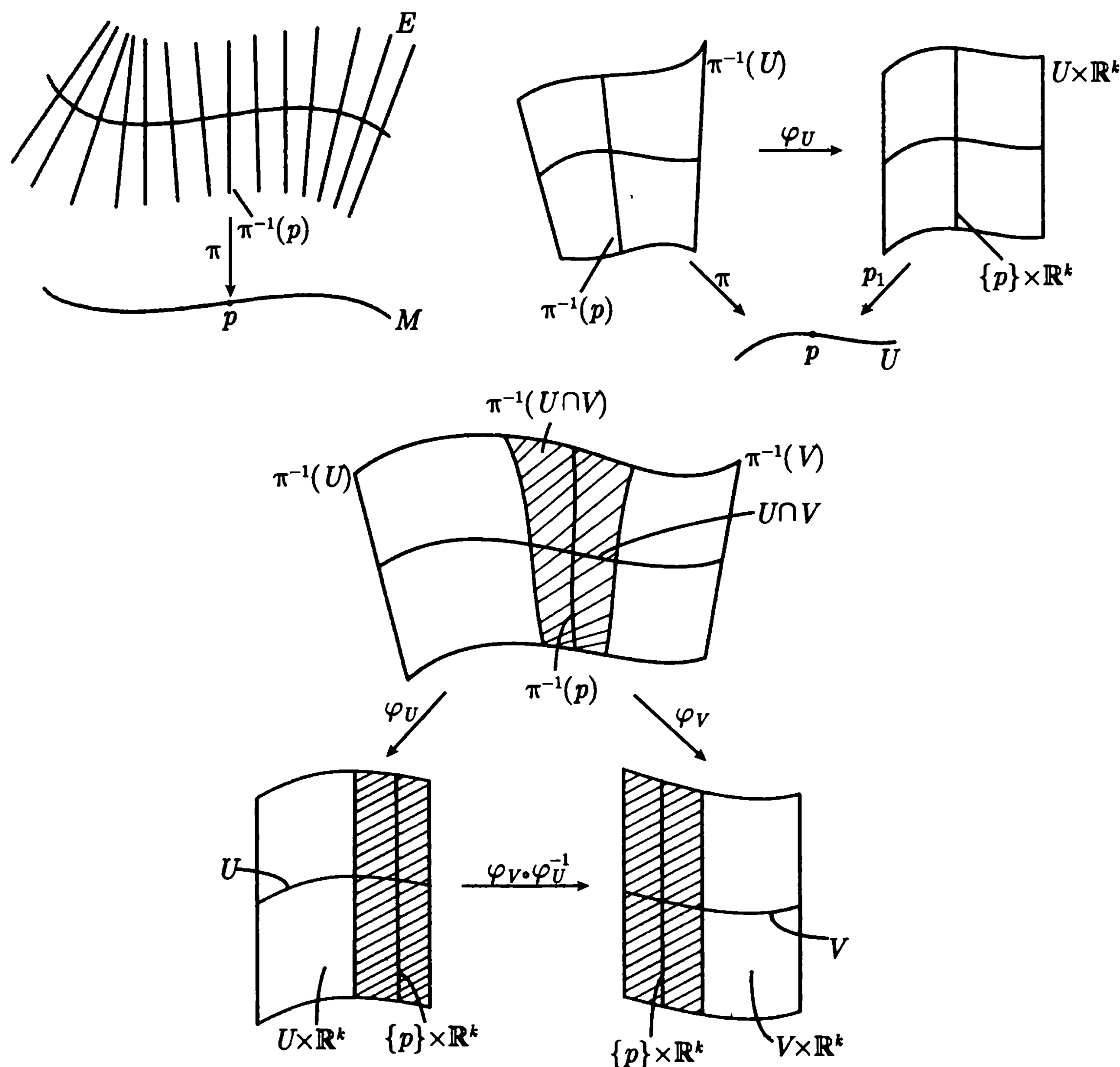


图 2.1

设 $U, V \in \mathcal{U}$ 且 $U \cap V \neq \varnothing$, 则 $\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}$ 表示为

$$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \to (U \cap V) \times \mathbb{R}^k,$$

$$(p, a) \mapsto (p, g_{VU}(p)a),$$

其中 $g_{VU}(p) \in GL(k, \mathbb{R})$, 由此得到的映射 $g_{VU} : U \cap V \to GL(k, \mathbb{R})$ 称为向量丛的**过渡函数**. 易见, 向量丛的过渡函数满足下列相容性条件

$$g_{WV} \cdot g_{VU} = g_{WU} \quad \text{在 } U \cap V \cap W \text{上}.$$

直观上, 可以把向量丛 E 看作诸如 $U \times \mathbb{R}^k$(U 是 M 的坐标域) 的积流形沿着流形 M 的同一点处的纤维粘合起来的结果, 粘合时要求纤维上的线性关系保持不

变. 而过渡函数告诉我们如何将纤维上的点粘合, 并且要求过渡函数光滑则保证粘合的光滑性.

在定义 2.1.1 中, 如果 E, M 仅要求是 Hausdorff 拓扑空间, 并且定义中的光滑映射换为连续映射, 微分同胚改成拓扑同胚, 那么 (E, M, π) 是 k 维实拓扑向量丛.

具体构作向量丛时, 采用下列等价的定义有时来得方便.

定义 2.1.2 设 E 是一个集合, M 是光滑流形, $\pi : E \to M$ 为满射, $\mathbb{R}^k$ 为 k 维实向量空间. 如果

(1) 对任意的 $p \in M$, 集合 $E_p = \pi^{-1}(p)$ 具有 k 维实向量空间结构.

(2) 存在 M 的开覆盖 $\mathcal{U}$, 并且对每一 $U \in \mathcal{U}$, 存在双射

$$\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$$

使得

(i) $p_1 \circ \varphi_U = \pi$, 其中 $p_1 : U \times \mathbb{R}^k \to U$ 为投影.

(ii) 对任意 $p \in U$, 映射 $\varphi_{U,p} = \phi_U|_{E_p} : E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k$ 是向量空间之间的同构.

(3) 若 $U, V \in \mathcal{U}$ 且 $U \cap V \neq \varnothing$, 令

$$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}(p, a) = (p, g_{VU}(p)a), \quad p \in U \cap V,\ a \in \mathbb{R}^k,$$

则要求过渡函数 $g_{VU} : U \cap V \to GL(k, \mathbb{R})$ 是 C^∞ 映射.

那么我们把 (E, M, π) 叫做 k 维 C^∞**实向量丛**.

注 利用各个 φ_U^{-1} 把 $U \times \mathbb{R}^k$ 的拓扑结构搬到 E 中, 可赋予 E 以拓扑结构, 并且可以证明赋予这种拓扑的空间 E 具有 C^∞ 微分结构, 从而 (E, M, π) 成为 k 维 C^∞ 实向量丛 (细节留给读者).

现以切丛为例讨论过渡函数. 设 $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{D}$ 均为围绕点 $p \in M$ 的局部坐标卡, 坐标函数分别为 $x_1, \cdots, x_m$ 和 $y_1, \cdots, y_m$. 设 $X \in T_pM \subset \pi^{-1}(U)$, 此时

$$\varphi_U(X) = \varphi_U\left(\sum_{i=1}^m a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p\right) = (p, a_1, \cdots, a_m),$$

其中 $a_i = X(x_i) = \mathrm{d}x_i(X), i = 1, \cdots, m$.

$$\psi_V(X) = \psi_V\left(\sum_{j=1}^m b_j \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_p\right) = (p, b_1, \cdots, b_m),$$

其中 $b_j = X(y_j) = \mathrm{d}y_j(X), j = 1, \cdots, m$. 利用 $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = \sum_{j=1}^m \left.\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right|_p \cdot \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_p$,

$i=1,\cdots,m$, 可导出

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix},$$

因此

$$g_{VU}(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}_p,$$

于是过渡函数 $g_{VU}: U\cap V \to GL(m,\mathbb{R})$ 是 C^∞ 映射.

定义 2.1.3　设 (E,M,π) 为光滑实向量丛. 若 C^∞ 映射 $\sigma: M\to E$ 满足条件 $\pi\circ\sigma = id_M$, 其中 id_M 表 M 上的恒同映射, 则称 σ 为向量丛 E 的一个**光滑截面**.

积流形 $M\times\mathbb{R}^k = E$ 是最简单的向量丛, 称为 M 上的**平凡丛**, 它的截面 σ 具有下列形式 $\sigma(p) = (p, f(p)), p\in M$, 其中 f 是从 M 到 $\mathbb{R}^k$ 的 C^∞ 映射.

2.2　流形上的向量场与流

2.2.1　光滑向量场

定义 2.2.1　流形 M 上的一个**向量场** X 指的是映射 $X: M\to TM$, 它满足 $\pi\circ X = id_M$. 这里 id_M 表 M 上的恒同映射, $\pi: TM\to M$ 为自然投影. 等价地说, 对每一 $p\in M$, 在映射 X 下对应于 $X(p)\in T_pM$. 如果 $X: M\to TM$ 还是 C^∞ 的, 那么 X 叫做 M 上的**光滑向量场**. 简言之, M 上的光滑向量场是切丛 TM 的一个光滑截面.

将 M 上的光滑向量场的全体记为 $C^\infty(M,TM)$. 设 $X,Y\in C^\infty(M,TM)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, 定义加法 $X+Y$ 和数乘 λX 如下: 对每个点 $p\in M$, 令

$$(X+Y)(p) = X(p)+Y(p),\quad (\lambda X)(p) = \lambda X(p),$$

易见 $C^\infty(M,TM)$ 为实向量空间. 如果 λ 为 M 上的 C^∞ 函数, 记为 $\lambda\in C^\infty(M)$, 规定 $(\lambda X)(p) = \lambda(p)X(p), p\in M$, 则 $C^\infty(M,TM)$ 是 C^∞ 函数环 $C^\infty(M)$ 上的模. 以下常常将 $X(p)$ 记为 X_p.

命题 2.2.1　设 X 为 C^∞ 流形 M 上的向量场, 则下列陈述等价:

(i) X 是 C^∞ 的.

(ii) 若 $(U, x_1, \cdots, x_m)$ 为 M 上的一个局部坐标系, 并假定 $\{a_i\}$ 是 U 上的一族函数, 由下式所确定

$$X|_U = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

则 a_i 为 U 上的 C^∞ 函数, 即 $a_i \in C^\infty(U), i = 1, \cdots, m$.

(iii) 对于 M 的任意开集 V 以及任意 $f \in C^\infty(V)$, 有 $Xf \in C^\infty(V)$, 这里 Xf 定义为 $(Xf)(p) = X_p f, p \in V$.

证明 (i)⇒(ii) X 是 C^∞ 的, 则 X 在 U 上的限制 $X|_U$ 也是 C^∞ 的. 又 $\mathrm{d}x_i$ 是 $\pi^{-1}(U) \subset TM$ 上的坐标函数 (见 2.1.1), 故 $\mathrm{d}x_i \circ X|_U$ 是 C^∞ 的. 而 $\mathrm{d}x_i \circ X|_U = a_i$, 所以 $a_i \in C^\infty(U)$.

(ii)⇒(iii) 只需证明 $Xf|_U \in C^\infty(U)$, 其中 $(U, x_1, \cdots, x_m)$ 是 M 上的任意局部坐标系, 合于 $U \subset V$. 据 (ii), 有

$$Xf|_U = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

并且等式右边是 U 上的 C^∞ 函数, 因而 $Xf|_U$ 是 C^∞ 的.

(iii)⇒(i) 为证 X 是 C^∞ 的, 只需证明 $X|_U$ 是 C^∞ 的, 其中 $(U, x_1, \cdots, x_m)$ 是 M 上的任意局部坐标系. 为此只需验证 $X|_U$ 与 $\pi^{-1}(U)$ 上的标准坐标函数的复合是 C^∞ 函数即可. 因 $x_i \circ \pi \circ X\big|_U = x_i, \mathrm{d}x_i \circ X\big|_U = X(x_i), i = 1, 2, \cdots, m$, 它们均为 U 上的 C^∞ 函数, 故 $X|_U$ 是 C^∞ 的.

2.2.2 括号积

流形 M 上的向量场可以看作是 $C^\infty(M)$ 上的算子, 能够运用它们作用于函数. 这样, 给定 $X, Y \in C^\infty(M, TM)$ 和 $f \in C^\infty(M)$, 有函数 $Y(f)$ 和 $X(Y(f)) = XY(f)$, 后者可视为一个 "二阶导数", 因而不能设想 XY 为一阶求导算子, 不能要求莱布尼兹法则仍然适用. 事实上,

$$\begin{aligned} XY(fg) &= X[Y(f)g + fY(g)] \\ &= [XY(f)]g + Y(f)X(g) + X(f)Y(g) + f[XY(g)], \end{aligned}$$

中间两项表明与莱布尼兹公式有差别. 这个 "误差" 项对 X 和 Y 是对称的, 因此算子 $XY - YX = [X, Y]$ 将是一个求导算子, 它叫做**括弧运算**.

定义 2.2.2 设 X 和 Y 为流形 M 上的光滑向量场, 它们的**括号积**$[X, Y]$ 定义如下:

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf),$$

其中 $p \in M, f \in C^\infty(M)$.

$[X,Y]$ 是 M 上的光滑向量场. 事实上, 对任意 $f,g\in C^\infty(M)$ 以及任意 $p\in M$, 有

(1) $[X,Y]_p(\lambda f+\mu g)=\lambda[X,Y]_pf+\mu[X,Y]_pg$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$,

(2) $[X,Y]_p(fg)=f(p)[X,Y]_pg+g(p)[X,Y]_pf$,

故 $[X,Y]_p\in T_pM$. 并且由命题 2.2.1 知,

$$[X,Y]f=X(Yf)-Y(Xf)$$

是 C^∞ 的, 因而 $[X,Y]$ 也是 C^∞ 的, 即 $[X,Y]$ 是流形 M 上的光滑向量场.

下列命题概述了括号积的基本运算规律.

命题 2.2.2　设 $X,Y,Z\in C^\infty(M,TM)$, f, $g\in C^\infty(M)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, 则

(i) 双线性 $[\lambda X+\mu Y,Z]=\lambda[X,Z]+\mu[Y,Z]$,

$[X,\lambda Y+\mu Z]=\lambda[X,Y]+\mu[X,Z]$.

(ii) 反对称性 $[X,Y]=-[Y,X]$, 特别有 $[X,X]=0$.

(iii) $[fX,gY]=f(Xg)Y-g(Yf)X+fg[X,Y]$.

(iv) Jacobi 恒等式 $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$.

证明　(i),(ii) 是显然的.

(iii) 设 $h\in C^\infty(M)$, 则由括号积的定义得

$$\begin{aligned}[fX,gY]h&=(fX)(gY)h-(gY)(fX)h\\&=(fX)(g\cdot Yh)-(gY)(f\cdot Xh)\\&=f(Xg)(Yh)+fg\cdot X(Yh)-g(Yf)(Xh)-gf\cdot Y(Xh)\\&=\{f(Xg)Y-g(Yf)X+fg[X,Y]\}h.\end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned}[X,[Y,Z]]f&=X([Y,Z]f)-[Y,Z](Xf)\\&=X(Y(Zf)-Z(Yf))-(Y(Z(Xf))-Z(Y(Xf))).\\&=(XYZ-XZY-YZX+ZYX)f,\end{aligned}$$

再由对称性得

$$\begin{aligned}&([X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]f\\=&(XYZ-XZY-YZX+ZYX)f+(YZX-YXZ-ZXY+XZY)f\\&+(ZXY-ZYX-XYZ+YXZ)f=0.\end{aligned}$$

性质 (i),(ii),(iv) 说明实向量空间 $C^\infty(M,TM)$ 在引入了括号积后是一个 Lie 代数. 注意这样的代数是非结合的. 下面用局部坐标来表示 $[X,Y]$. 设 $(U,\varphi;x_1,\cdots,x_m)$ 是流形 M 上的一个局部坐标系, 则 X 和 Y 在 U 上可分别表示为

$$X|_U=\sum_{i=1}^m a_i\frac{\partial}{\partial x_i}\ 和\quad Y|_U=\sum_{i=1}^m b_i\frac{\partial}{\partial x_i},$$

其中 $a_i, b_i \in C^\infty(U), i = 1, \cdots, m$. 易见 $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0,\ 1 \leqslant i, j \leqslant m$, 于是

$$
\begin{aligned}
[X,Y]|_U = [X|_U, Y|_U] &= \left[\sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^m b_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left[a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, b_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right] \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} b_j\right) \frac{\partial}{\partial x_j} - b_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} a_i\right) \frac{\partial}{\partial x_i} + a_i b_j \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]\right) \\
&= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)\right) \frac{\partial}{\partial x_j}.
\end{aligned}
$$

设 $F: M \to N$ 为 C^∞ 映射, X 为流形 M 上的向量场. 问: $\mathrm{d}F(X)$ 是否是 N 上的向量场呢? 举反例如下: 设 $M = \mathbb{R}^2, N = \mathbb{R}, F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 定义为 $u = F(x,y) = x$. 又取 $X = y\frac{\partial}{\partial x}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的向量场. 对于 $p = (0,0)$ 和 $q = (0,1)$, 显然 $F(p) = F(q) = 0$, 但是 $(\mathrm{d}F)_q(X_q) = (\mathrm{d}F)_q \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} \neq 0 = (\mathrm{d}F)_p(X_p)$. 为回答上面的问题, 将 M 上的向量场变换成 N 上的向量场, 现引入下面的

定义 2.2.3 设 $F: M \to N$ 为 C^∞ 映射, X 与 Y 分别为 M 和 N 上的光滑向量场. 如果

$$
\mathrm{d}F \circ X = Y \circ F,
$$

则称向量场 X 与 Y 是 F- 相关的.

注 上式意指 $(\mathrm{d}F)_p(X_p) = Y_{F(p)}$, 对每个点 $p \in M$. 而这又等价于对 N 上的任意 C^∞ 函数 f, 有 $(\mathrm{d}F)_p(X_p)(f) = Y_{F(p)}(f)$, 或 $X_p(f \circ F) = (Yf)_{F(p)} = (Yf) \circ F(p)$, 因此,

$$
X(f \circ F) = (Yf) \circ F.
$$

命题 2.2.3 设 $F: M \to N$ 为 C^∞ 映射, X_i, Y_i 分别为 M 和 N 上的 C^∞ 向量场, 且 X_i, Y_i 是 F- 相关的, $i = 1, 2$, 则向量场 $[X_1, X_2]$ 与 $[Y_1, Y_2]$ 也是 F- 相关的.

证明 设 $p \in M, f \in C^\infty(N)$, 有

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{d}F)_p([X_1, X_2]_p)(f) = [X_1, X_2]_p(f \circ F) \\
&= (X_1)_p(X_2(f \circ F)) - (X_2)_p(X_1(f \circ F)) \\
&= (X_1)_p((Y_2 f) \circ F) - (X_2)_p((Y_1 f) \circ F) \\
&= (\mathrm{d}F)_p(X_1)_p(Y_2 f) - (\mathrm{d}F)_p(X_2)_p(Y_1 f) \\
&= (Y_1)_{F(p)}(Y_2 f) - (Y_2)_{F(p)}(Y_1 f) \\
&= [Y_1, Y_2]_{F(p)}(f),
\end{aligned}
$$

因此 $\mathrm{d}F \circ [X_1, X_2] = [Y_1, Y_2] \circ F$, 说明 $[X_1, X_2]$ 与 $[Y_1, Y_2]$ 是 F- 相关的.

2.2.3 流形上的流

定义 2.2.4 设 M 为微分流形, C^∞ 映射

$$\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$$

称为 M 上的**动力系统**或 (**整体**)**流**, 如果对所有 $p \in M$ 以及 $t, s \in \mathbb{R}$, 有

(i) $\Phi(0, p) = p$,

(ii) $\Phi(t, \Phi(s, p)) = \Phi(t + s, p)$.

现对 Φ 从两方面进行分析:

1) Φ 可用单参数光滑映射族 $\{M \to M\}$ 来代替, 参数 $t \in \mathbb{R}$, 即 $\Phi = \{\Phi_t | t \in \mathbb{R}\}$, 其中 $\Phi_t : M \to M, p \mapsto \Phi_t(p) = \Phi(t, p)$, 那么 (i), (ii) 可表为

(i)$'$ $\Phi_0 = id_M$, (ii)$'$ $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}$,

于是有 $\Phi_{-t} = \Phi_t^{-1}$, 这说明每一 $\Phi_t : M \to M$ 是一个微分同胚. 将 M 上的微分同胚全体记为 Diff(M), 在映射复合运算下作成一个群. 我们把 $\{\Phi_t : M \to M \,| t \in \mathbb{R}\}$ 称为 M 上的**单参数C^∞变换群**.

光滑映射 $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ 是一个动力系统 $\Leftrightarrow$ 映射 $t \mapsto \Phi_t$ 规定一个从群 $(\mathbb{R}, +)$ 到群 Diff(M) 的群同态, 因此我们说群 $(\mathbb{R}, +)$ 作用于流形 M 上.

2) 从另一角度来考察流 $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$. 设 $p \in M$. 我们把曲线 $\alpha_p : \mathbb{R} \to M$, $t \mapsto \alpha_p(t) = \Phi(t, p)$ 称为过点 p 的**流线**, 而把流线 α_p 的像 $\alpha_p(\mathbb{R})$ 称为过点 p 的**轨道**. 因此 M 上的流 Φ 可视为流线族 $\{\alpha_p : \mathbb{R} \to M \,| p \in M\}$, 以 M 作为参数空间.

给定 M 上的流 Φ, 则经过 M 的每一点的轨道恰好只有一条. 事实上, 对 M 上的点引入下列关系: $p \sim q \Leftrightarrow$ 存在 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $p = \alpha_q(t)$. 易见 "$\sim$" 是一等价关系, 在该等价关系下的每一等价类便是轨道.

M 上的轨道有三种类型, 我们试图给出反映这三类轨道特性的一般图形, 首先给出下列定义.

定义 2.2.5 流形 M 中的光滑曲线 $\sigma : (a, b) \to M$ 在点 $t_0 \in (a, b)$ 处的**切向量**是向量 $\mathrm{d}\sigma \left(\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t_0} \right) \in T_{\sigma(t_0)}M$, 把它简记为 $\dot{\sigma}(t_0)$, 称为曲线 σ 在点 t_0 处的**速度向量**.

命题 2.2.4 给定 M 上的流 Φ, 则流线 $\alpha_p : \mathbb{R} \to M$ 或为单一浸入 (图 2.2(a)) 或为周期浸入 (图 2.2(b), 即 α_p 是浸入且存在 $s > 0$, 使得 $\alpha_p(t + s) = \alpha_p(t)$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 皆成立) 或为常值映射 (即对所有 t, $\alpha_p(t) = p$), 此时称 p 为流 Φ 的一个**不动点**.

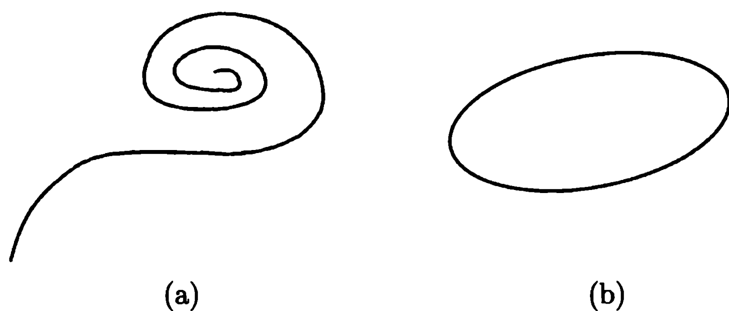


图 2.2

证明 因为 $\alpha_p:\mathbb{R}\to M$ 是流线, 因此 $\alpha_p(t_0+t)=\varPhi_{t_0+t}(p)=\varPhi_{t_0}\circ\varPhi_t(p)=\varPhi_{t_0}\circ\alpha_p(t),\dot{\alpha}_p(t_0)=\mathrm{d}\varPhi_{t_0}(\dot{\alpha}_p(0))$. 由于 $\varPhi_{t_0}$ 是微分同胚, 所以 (i) $\dot{\alpha}_p(t)\neq 0$ 对所有 $t\in\mathbb{R}$, 从而 $\alpha_p:\mathbb{R}\to M$ 是浸入, 或 (ii)$\dot{\alpha}_p(t)=0$ 对所有 $t\in\mathbb{R}$, 从而 $\alpha_p:\mathbb{R}\to M$ 是常值映射. 而情形 (i) 又可分为两种情况: α_p 或为单一浸入或 α_p 是浸入但不是单射, 因而存在 $t_0<t_1$ 使得 $\alpha_p(t_0)=\alpha_p(t_1)$, 即 $\varPhi_{t_0}(p)=\varPhi_{t_1}(p)$, 于是 $\varPhi_t\circ\varPhi_{t_0}(p)=\varPhi_t\circ\varPhi_{t_1}(p)$ 对所有 $t\in\mathbb{R}$ 均成立, 由此得到 $\varPhi_t(p)=\varPhi_{t+(t_1-t_0)}(p)$, 即 $\alpha_p(t)=\alpha_p(t+(t_1-t_0))$, 对一切 $t\in\mathbb{R}$.

设 U 是流形 M 的开子集, 并且在 M 上有流 $\varPhi$, 那么经过 U 中点的流线一般来说不会全位于 U 中 (如图 2.3(a) 所示). 然而基于连续性, 若 $p\in U$, 则存在包含 $0\in\mathbb{R}$ 的某个开区间 (a_p,b_p), 使得 $\alpha_p((a_p,b_p))\subset U$(见图 2.3(b)). 这一情形启发我们建立 "局部流" 的概念.

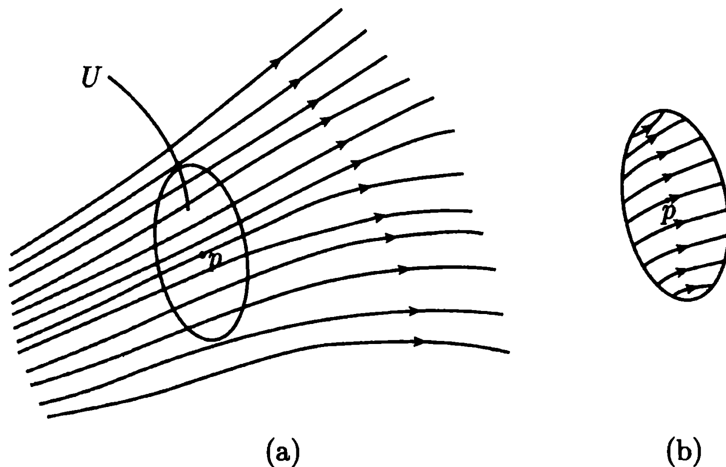


图 2.3

定义 2.2.6 设 M 为光滑流形, A 是 $\mathbb{R}\times M$ 中包含 $\{0\}\times M$ 的开子集, 并且对每一 $p\in M$, $A\cap(\mathbb{R}\times\{p\})$ 连通. 如果 C^∞ 映射

$$\varPhi:A\to M$$

满足下列条件:

(i) $\varPhi(0,p)=p$ 对所有 $p\in M$,

(ii) $\Phi(t, \Phi(s,p)) = \Phi(t+s,p)$ 对使等式两边均有定义的所有 t, s, p,
那么称 Φ 为 M 上的一个**局部流**.

对于局部流, 一般来说不能断言 $\Phi_t : p \longmapsto \Phi(t,p)$ 是微分同胚, 因为对取定的 $t \neq 0$, Φ_t 的定义域不必为整个 M. 倘若一个局部流的定义域 $A = \mathbb{R} \times M$, 那么它便是**整体流**.

定义 2.2.7　设 Φ 是流形 M 上的一个 (整体或局部) 流, 则向量场

$$\dot{\Phi} : M \to TM,\ p \mapsto \dot{\alpha}_p(0)$$

称为流 Φ 的**速度场**.

下面说明流的速度场是光滑向量场. 任取点 $p \in M$, 设 $(U, x_1, \cdots, x_m)$ 是围绕点 p 的局部坐标系,$\dot{\Phi}(p) = \dot{\alpha}_p(0)$ 用局部坐标表示为

$$\dot{\Phi}(p) = \sum_{i=1}^{m} \left.\frac{\mathrm{d}x_i(\alpha_p(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p = \sum \left.\frac{\mathrm{d}x_i(\Phi_t(p))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p .$$

因 Φ 是 C^∞ 映射, 依命题 2.2.1,$\dot{\Phi} : p \longmapsto \dot{\Phi}(p)$ 定义了 M 上的一个 C^∞ 切向量场.

现在问: 对于事先给定的 M 上的光滑向量场, 能否决定 M 上的流使其速度场就是事先指定的向量场呢?

定义 2.2.8　设 X 是 m 维光滑流形 M 上的一个光滑向量场, M 中的光滑曲线 $\sigma : (a,b) \to M$ 称为 X 的一条**积分曲线**或**流线**, 如果 σ 在每一点的切向量等于 X 在该点的值, 即

$$\dot{\sigma}(t) = X_{\sigma(t)}, \quad \forall t \in (a,b).$$

设 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_m)$ 是围绕点 $p \in M$ 的局部坐标系, $\sigma : (a,b) \to U$ 是 U 中的光滑曲线, X 为 M 上的 C^∞ 向量场. 依命题 2.2.1,

$$X|_U = \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad a_i \in C^\infty(U), i = 1, \cdots, m,$$

又

$$\dot{\sigma}(t) = \mathrm{d}\sigma \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_t \right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\mathrm{d}(x_i \circ \sigma)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i},$$

所以 σ 为 X 的积分曲线当且仅当

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_i(t)}{\mathrm{d}t} = a_i \circ \varphi^{-1}(\sigma_1(t), \cdots, \sigma_m(t)), \quad i = 1, \cdots, m, \tag{1}$$

其中 $\sigma_i = x_i \circ \sigma$. 因此为求向量场 X 在某一坐标邻域 U 上的积分曲线, 需要求解常微分方程组 (1). 下面的经典结果保证了解的存在性.

定理 2.2.1 记 $\mathbb{R}^m$ 的坐标为 $r_1,\cdots,r_m$. 设 W 为点 $w_0\in\mathbb{R}^m$ 的开邻域, $\alpha_i\in C^\infty(W), i=1,\cdots,m$, 则存在点 w_0 的开邻域 $W_0\subset W$, 正实数 ε 以及 C^∞ 映射

$$h:(-\varepsilon,\varepsilon)\times W_0\to W$$

具有如下性质: 对于每个 $w\in W_0$, 由 $\sigma_w(t)=h(t,w)$ 定义的曲线 $\sigma_w:(-\varepsilon,\varepsilon)\to W$ 满足下列方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r_i\circ\sigma_w)(t)=\alpha_i(r_1\circ\sigma_w(t),r_2\circ\sigma_w(t),\cdots,r_m\circ\sigma_w(t)),\quad i=1,\cdots,m \tag{2}$$

对于所有 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, 并且

$$(r_i\circ\sigma_w)(0)=r_i(w),\quad i=1,\cdots,m. \tag{3}$$

此外, 满足 (2) 和 (3) 的 σ_w 是唯一的.

过渡到流形上, 用向量场的语言来叙述, 我们有

定理 2.2.2 设 X 为光滑流形 M 上的光滑向量场, $p_0\in M$, 则存在点 p_0 在 M 中的开邻域 V 和 $\varepsilon>0$ 以及光滑映射

$$h:(-\varepsilon,\varepsilon)\times V\to M,$$

使得对于每个 $p\in V$, 由 $\sigma_p(t)=h(t,p)$ 定义的曲线 $\sigma_p:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是 X 的满足 $\sigma_p(0)=p$ 的唯一积分曲线.

另外, 对于每个 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, 由 $h_t(p)=h(t,p)$ 定义的光滑映射 $h_t:V\to M$ 具有性质:

(i) 在 $h_{t_2}^{-1}(V)$ 上, $h_{t_1+t_2}=h_{t_1}\circ h_{t_2}$, 只要 t_1,t_2 和 (t_1+t_2) 都属于 $(-\varepsilon,\varepsilon)$,

(ii) 在 $h_t(V)\cap V$ 上, $h_{-t}=h_t^{-1}$ 对每个 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ 成立.

证明 设 $(U,\varphi;x_1,\cdots,x_m)$ 是围绕点 p_0 的局部坐标系. 由于 φ 是微分同胚, 不难验证 $\mathrm{d}\varphi(X|_U)=\widetilde{X}$ 是 $\widetilde{U}=\varphi(U)\subset\mathbb{R}^m$ 上的光滑向量场. 应用定理 2.2.1, 存在点 $\varphi(p_0)$ 的开邻域 $\widetilde{V}(\subset\widetilde{U})$ 和 $\varepsilon>0$ 及 C^∞ 映射

$$\widetilde{h}:(-\varepsilon,\varepsilon)\times\widetilde{V}\to\widetilde{U}$$

满足定理 2.2.1 中所述性质. 令 $V=\varphi^{-1}(\widetilde{V})$, 定义 $h:(-\varepsilon,\varepsilon)\times V\to U$ 为 $h(t,p)=\varphi^{-1}(\widetilde{h}(t,\varphi(p)))$. 由于 φ 是微分同胚, 容易验证 h 具有本定理前半部分所述的性质. 而定理的后半部分关于 $\{h_t\}$ 的论断是解的唯一性的推论. 事实上, $t_1\mapsto h(t_1+t_2,p)$ 和 $t_1\mapsto h(t_1,h_{t_2}(p))$ 都是 X 的经过点 $h_{t_2}(p)$ 的积分曲线. 因此它们相同, 从而 $h_{t_1+t_2}=h_{t_1}\circ h_{t_2}$. 类似地有 $h_{-t}=h_t^{-1}$.

本定理不仅保证向量场的积分曲线的局部存在性, 而且还可进一步推出流形上的每一光滑向量场是该流形上某一局部流的速度场. 此外, 我们把具有性质 (i),(ii) 的一族 C^∞ 局部变换 $\{h_t : V \to M\}$ 叫做向量场 X 的**局部 1- 参数变换群**.

定理 2.2.3　设 X 为紧致流形 M 上的光滑向量场, 则存在 M 上的整体流 $h : \mathbb{R} \times M \to M$, 它的速度场就是 X, 因此 X 叫做**完备向量场**.

换言之, 紧致流形上的每一光滑向量场是完备向量场.

证明　任取点 $p \in M$, 由定理 2.2.2 知, 存在点 p 的开邻域 $\widetilde{V}(p)$ 和 $\widetilde{\varepsilon}(p) > 0$ 以及 C^∞ 映射 $h_p : (-\widetilde{\varepsilon}(p), \widetilde{\varepsilon}(p)) \times \widetilde{V}(p) \to M$ 具有定理 2.2.2 中所述性质. 又 $(h_p)_0 = = id_{\widetilde{V}(p)}$, 故存在点 p 的开邻域 $V(p) \subset \widetilde{V}(p)$ 和 $0 < \varepsilon(p) \leqslant \widetilde{\varepsilon}(p)$, 使得当 $q \in V(p), |t| < \varepsilon(p)$ 时, $(h_p)_t(q) \in \widetilde{V}(p)$, 因而当 $|t|, |s|, |t+s| < \varepsilon(p)$ 并且 $q \in V(p)$ 时, $(h_p)_s(q) \in \widetilde{V}(p), (h_p)_{t+s}(q) = (h_p)_t \circ (h_p)_s(q)$.

由于 M 紧致, M 的开覆盖 $\{V(p)|p \in M\}$ 有有限子覆盖, 设为 $\{V(p_i)|i=1,\cdots,k\}$. 令 $\varepsilon = \min\{\varepsilon(p_i)|i = 1,\cdots,k\}$. 注意当 $V(p_i) \cap V(p_j) \neq \varnothing$ 及 $i \neq j$ 时, 相应的 $h_{p_i} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V(p_i) \to M$ 和 $h_{p_j} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V(p_j) \to M$ 在 $(-\varepsilon, \varepsilon) \times (V(p_i) \cap V(p_j))$ 上是一致的, 因此由诸 $h_{p_i} (i = 1, \cdots, k)$ 可定义一个局部流 $h : A \to M$, 其中 A 包含 $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M$. 我们还可以把定义在 $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M$ 上的流扩张到$(-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times M$ 上, 只须令 $h(t,p) = h\left(\dfrac{t}{2}, h\left(\dfrac{t}{2}, p\right)\right)$, 因此 $(-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times M \subset A$. 进而有 $A = \mathbb{R} \times M$. 理由如下: 设 $t \in \mathbb{R}, t = n\cdot\dfrac{\varepsilon}{2}+s, n \in \mathbb{Z}, |s| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 若 $n \geqslant 0$, 令 $h_t = \underbrace{h_{\varepsilon/2} \circ h_{\varepsilon/2} \circ \cdots \circ h_{\varepsilon/2}}_{n\text{个}} \circ h_s$; 若 $n < 0$, 令 $h_t = \underbrace{h_{-\varepsilon/2} \circ h_{-\varepsilon/2} \circ \cdots \circ h_{-\varepsilon/2}}_{|n|\text{个}} \circ h_s$. 于是得到 C^∞ 映射 $h : \mathbb{R} \times M \to M$ 具有性质:(i)$h_0 = id_M$, (ii) 对任意 $t, s \in \mathbb{R}, h_{t+s} = h_t \circ h_s$, 即 h 是 M 上的整体流. 而由诸 h_p 的构造知, X 是 h 的速度场.

例 1　当研究 $\mathbb{R}^3$ 中的一个质点在力场 F 的作用下运动时, 牛顿定律告诉我们, 质点的运动轨道是一条曲线 $(x_i(t))$, 满足

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_i(t)}{\mathrm{d}t^2} = F_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

其中 m 表质点的质量. 令 $p_i = m\left(\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \frac{p_i}{m}, \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = F_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

而 $(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3)$ 可以看作是 $\mathbb{R}^3$ 的余切丛上的坐标函数, 因此质点的轨道正好是余切丛上的一个向量场的积分曲线在 $\mathbb{R}^3$ 上的投影. 由此可见, 对于流形上的

力学研究而言, 余切丛自然成为研究的数学工具.

命题 2.2.5 设 M 为微分流形, $\{\varphi_t|\ t\in\mathbb{R}\}$ 是 M 上单参数 C^∞ 变换群, X 是相应的速度场. 若 $\psi: M\to M$ 为 C^∞ 微分同胚, 则 $\{\ \psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}\big|t\in\mathbb{R}\}$ 也是 M 上的单参数 C^∞ 变换群, 并且它的速度场 $\widetilde{X}$ 满足下列关系: $\mathrm{d}\psi\circ X=\widetilde{X}\circ\psi$.

证明 令 $\widetilde{\varphi}_t=\psi\circ\varphi_t\circ\psi^{-1}: M\to M$, 读者不难验证 $\{\widetilde{\varphi}_t|\ t\in\mathbb{R}\}$ 是 M 上的单参数 C^∞ 变换群. 取点 $p\in M$, 用

$$\alpha_p(t)=\varphi_t(p)\quad 和\quad \widetilde{\alpha}_p(t)=\widetilde{\varphi}_t(p)$$

定义的 C^∞ 曲线 α_p和$\widetilde{\alpha}_p$ 分别是对应于单参数变换群 $\{\varphi_t\}$和$\{\widetilde{\varphi}_t\}$ 的过点 p 的流线, 并且依假设条件, $X_p=\dot{\alpha}_p(0)$. 任取 $f\in C^\infty(M)$, 则

$$(\mathrm{d}\psi(X_p))(f)=X_p(f\circ\psi)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(f\circ\psi\circ\alpha_p(t))=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(f\circ\psi\circ\varphi_t(p))$$

$$=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(f\circ\widetilde{\varphi}_t(\psi(p))=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\big(f\circ\widetilde{\alpha}_{\psi(p)}(t)\big)=\widetilde{X}_{\psi(p)}(f),$$

因此 $\mathrm{d}\psi\circ X=\widetilde{X}\circ\psi, X$与$\widetilde{X}$是$\psi$- 相关的.

2.3 分布与 Frobenius 定理

2.2 节讨论了流形上向量场的积分曲线, 对此还可进一步深入. 本节引理 2.3.1 陈述的是: 若 m 维流形 M 上的向量场 X 在点 $p\in M$ 的值 $X_p\neq 0$, 则有一个围绕点 p 的局部坐标系 $(U,\varphi;x_1,\cdots,x_m)$, 使得在 U 中 $X=\dfrac{\partial}{\partial x_1}$, 因而在 U 中的积分曲线可以被拉直. 自然又可提出这样一个问题: 如果有一族向量场 $X_1,\cdots,X_k(k\leqslant m)$ 在点 $p\in M$ 的值都不为 0, 能否找到围绕点 p 的坐标卡 $(U,\varphi;x_i)$, 使各个 X_i 在 U 中表示为

$$X_i=\frac{\partial}{\partial x_i},\quad i=1,\cdots,k.$$

换言之, 能否将所有过点 p 的积分曲线 $\sigma_1,\cdots,\sigma_k$ 同时拉直? 当然对这些向量场 $X_1,\cdots,X_k$ 有一些要求, 例如诸 X_i 必须是线性无关的, 另外由 $\left[\dfrac{\partial}{\partial x_i},\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right]=0$ 要求诸 X_i 满足所谓 “对合” 条件. 而诸 $X_i(i=1,\cdots,k)$ 在 M 的各点线性无关, 因而它们张成 M 在该点的切空间的一个 k 维子空间. 这样一来, 本节讨论的关于 “子空间场” 的积分子流形存在性问题自然是向量场的积分曲线存在性问题的推广, Frobenius 定理对该问题作出了深刻的回答. 首先引入一些必要的概念.

定义 2.3.1 设 M 为 m 维光滑流形, M 上的一个 **k 维分布$\mathfrak{D}$** $(1\leqslant k\leqslant m)$ 是说对每一 $p\in M$, 指定切空间 T_pM 的一个 k 维子空间 $\mathfrak{D}(p)$. M 上的向量场 X 属于 (或位于) 分布 $\mathfrak{D}$ (记为$X\in\mathfrak{D}$), 是指对每一 $p\in M$, 有 $X_p\in\mathfrak{D}(p)$.

如果对每一 $p \in M$, 存在点 p 的邻域 U 以及 U 上的 k 个处处线性无关的光滑向量场 $X_1, \cdots, X_k$, 使得对每个点 $q \in U$, 切向量 $X_1(q), \cdots, X_k(q)$ 张成子空间 $\mathfrak{D}(q)$, 则称分布 $\mathfrak{D}$ 是**光滑的**, $X_1, \cdots, X_k$ 称为分布 $\mathfrak{D}$ 的**局部基**, 并记 $\mathfrak{D}|_U = \{X_1, \cdots, X_k\}$

定义 2.3.2　设 $\mathfrak{D}$ 是流形 M 上的光滑分布. 如果 M 上的光滑向量场 X 与 Y 属于 $\mathfrak{D}$, 那么它们的括号积 $[X, Y]$ 也属于 $\mathfrak{D}$, 我们说 $\mathfrak{D}$ 是 M 上的**对合分布**, 也称分布 $\mathfrak{D}$ 满足 Frobenius 条件.

定义 2.3.3　设 (N, G) 是 M 的子流形, $\mathfrak{D}$ 为 M 上的分布. 若对每一 $q \in N$, 有

$$\mathrm{d}G(T_qN) = \mathfrak{D}(G(q)),$$

则称 N 为分布 $\mathfrak{D}$ 的**积分流形**.

特别, 当 $\mathfrak{D}$ 是 1 维分布时, 其积分流形可视为向量场的积分曲线.

命题 2.3.1　假设流形 M 上的光滑分布 $\mathfrak{D}$ 具有性质: 对于 M 上的任意点 p, 都有 $\mathfrak{D}$ 的积分流形经过点 p, 则分布 $\mathfrak{D}$ 是对合的.

证明　设 X 和 Y 是 M 上的 C^∞ 向量场, 且 $X, Y \in \mathfrak{D}$. 为证 $\mathfrak{D}$ 是对合分布, 任取点 $p \in M$, 只需证明 $[X, Y]_p \in \mathfrak{D}(p)$.

假定 (N, G) 是分布 $\mathfrak{D}$ 的经过点 p 的积分流形, 并设 $q_0 \in N$ 使得 $G(q_0) = p$. 因对每一 $q \in N, (\mathrm{d}G)_q : T_qN \to \mathfrak{D}(G(q))$ 是一个同构, 故存在 N 上的向量场 $\widetilde{X}$ 和 $\widetilde{Y}$, 使得 $\mathrm{d}G \circ \widetilde{X} = X \circ G$, $\mathrm{d}G \circ \widetilde{Y} = Y \circ G$. 可以验证 $\widetilde{X}$ 和 $\widetilde{Y}$ 都是 C^∞ 的. 依命题 2.2.3, $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ 与 $[X, Y]$ 是 G- 相关的, 于是

$$[X, Y]_p = (\mathrm{d}G)_{q_0}([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_{q_0}) \in \mathfrak{D}(p).$$

下面考察命题 2.3.1 的逆命题, 首先就 1 维分布情形讨论.

引理 2.3.1　设 X 是 m 维流形 M 上的 C^∞ 向量场. 若在点 $p \in M$ 处有 $X_p \neq 0$, 则存在点 p 的一个局部坐标系 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_m)$, 使得

$$X|_U = \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_U.$$

证明　选取点 p 的局部坐标系 $(V, \tau; y_1, \cdots, y_m)$ 使得 $\tau(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$ 并且 $X_p = \left.\dfrac{\partial}{\partial y_1}\right|_p$. 据定理 2.2.2, 存在 $\varepsilon > 0$ 与点 $0 \in \mathbb{R}^{m-1}$ 的邻域 W, 使得由

$$\sigma(t, a_2, \cdots, a_m) = h_t(\tau^{-1}(0, a_2, \cdots, a_m)), |t| < \varepsilon, (a_2, \cdots, a_m) \in W$$

所定义的映射 $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times W \to M$ 是 C^∞ 的. 因

$$\mathrm{d}\sigma\left(\left.\frac{\partial}{\partial r_1}\right|_0\right) = X_p = \left.\frac{\partial}{\partial y_1}\right|_p \text{和 } \mathrm{d}\sigma\left(\left.\frac{\partial}{\partial r_i}\right|_0\right) = \left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p, \quad i = 2, \cdots, m,$$

故 σ 在点 $0 \in \mathbb{R}^m$ 处是非退化的. 由反函数定理知, σ 是局部微分同胚. 令 $\varphi = \sigma^{-1}$, 则在点 p 的某一邻域 U 上, φ 为坐标映射, (U, φ) 是局部坐标系, 坐标函数记为 $x_i = r_i \circ \varphi, i = 1, \cdots, m$. 注意到

$$\mathrm{d}\sigma \left(\left. \frac{\partial}{\partial r_1} \right|_{(t, a_2, \cdots, a_m)} \right) = X_{\sigma(t, a_2, \cdots, a_m)},$$

因此有

$$X|_U = \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_U .$$

定理 2.3.1(Frobenius 定理) 设 M 为 m 维 C^∞ 流形, $\mathfrak{D}$ 为 M 上的 k 维对合光滑分布, $p \in M$, 则存在分布 $\mathfrak{D}$ 的积分流形经过点 p. 说得更详细些, 存在以点 p 为中心的立方坐标系 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_m)$(此时 $\varphi(U)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开立方体, $\varphi(p) = 0$), 使得 U 中的诸 "薄片"(slice)

$$\{q \in U | \varphi(q) = (x_1, \cdots, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_m), x_i = \text{常数}, i = k+1, \cdots, m\} \tag{1}$$

皆为分布 $\mathfrak{D}$ 的积分流形.

证明 对维数 k 使用归纳法来证明存在性. 当 $k = 1$ 时, 在点 p 的某一开邻域上选取非零向量场 X, 使得 $X \in \mathfrak{D}$(此时 $X_p \neq 0$). 依引理 2.3.1, 可以选取一个以点 p 为中心的立方坐标系 (U, φ), 使得 $X|_U = \left. \dfrac{\partial}{\partial x_1} \right|_U$, 于是定理在 $k = 1$ 时成立.

现归纳假定对 $(k-1)$ 维分布结论成立, 下面就 k 维分布 $\mathfrak{D}$ 证明结论也是对的. 因为分布 $\mathfrak{D}$ 是光滑的, 因此在点 p 的某一邻域 $\widetilde{V}$ 上, 存在 k 个处处线性无关的光滑向量场 $X_1, \cdots, X_k$, 它们张成 $\mathfrak{D}$. 据引理 2.3.1, 存在以点 p 为中心的局部坐标系 $(V; y_1, \cdots, y_m)$, 满足 $V \subset \widetilde{V}$, 并且使得

$$X_1|_V = \frac{\partial}{\partial y_1}. \tag{2}$$

在 V 上, 令

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1, \\ Y_i &= X_i - X_i(y_1) X_1, \quad i = 2, \cdots, k, \end{aligned} \tag{3}$$

则向量场 $Y_1, \cdots, Y_k$ 在 V 中处处线性无关并且张成 $\mathfrak{D}$. 令 $S(\subset V)$ 是由 $y_1 = 0$ 所确定的薄片, 并令

$$Z_i = Y_i|_S, \quad i = 2, \cdots, k, \tag{4}$$

由 (2) 与 (3) 可导出

$$Y_i(y_1) = 0, \quad i = 2, \cdots, k. \tag{5}$$

因此 Z_i 实际上是 S 上的向量场, 即当 $q \in S$ 时, $Z_i(q) \in T_qS$, 从而 $\{Z_2, \cdots, Z_k\}$ 在 S 上张成一个光滑的 $(k-1)$ 维分布. 下面证明它是一个对合分布.

用 $\zeta: S \to M$ 表包含映射, 则 Z_i 和 Y_i 是 ζ- 相关的. 据命题 2.2.3, 诸 Z_i 的括号积及相应的诸 Y_i 的括号积也是 ζ- 相关的. 然而当 $i, j \geqslant 2$ 时, $[Y_i, Y_j](y_1) = 0$, 即 $[Y_i, Y_j]$ 在 Y_1 方向上的分量等于 0, 因此存在 $c_{ijl} \in C^\infty(V)$ 使得在 V 上

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{l=2}^{k} c_{ijl} Y_l,$$

于是

$$[Z_i, Z_j] = \sum_{l=2}^{k} c_{ijl}|_S \cdot Z_l.$$

这说明由 $Z_2, \cdots, Z_k$ 所张成的 S 上的分布 $\mathfrak{D}_1$ 是对合的. 根据归纳假设, 存在点 p 在 S 中的某邻域上的立方坐标系 $\{w_2, \cdots, w_m\}$ 以点 p 为中心, 使得在该邻域上由

$$w_i = \text{常数}, \quad i = k+1, \cdots, m$$

所确定的薄片恰为分布 $\mathfrak{D}_1$ 的积分流形.

对于原来的坐标系 $(V; y_1, \cdots, y_m)$, 令 $\pi: V \to S$ 为自然投影, 并在点 p 于 M 中的某一邻域上, 规定

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ x_j &= w_j \circ \pi, \quad j = 2, \cdots, m, \end{aligned} \tag{6}$$

显然这些函数在点 p 处是独立的并且取值为 0, 因此可选取点 p 的一个适当邻域 U, 使得 $(U; x_1, \cdots, x_m)$ 是以点 p 为中心的立方坐标系. 若能证明在 U 上有

$$Y_i(x_{k+r}) \equiv 0, i = 1, \cdots, k; r = 1, \cdots, m-k, \tag{7}$$

即 $Y_i (1 \leqslant i \leqslant k)$ 在 $\dfrac{\partial}{\partial x_{k+1}}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x_m}$ 上的分量为 0, 那么 Y_i 可表为 $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ 的线性组合, 因而 U 上的的向量场 $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ 构成分布 $\mathfrak{D}$ 的局部基, 由 (1) 式表示的薄片便是分布 $\mathfrak{D}$ 的积分流形. 这样一来, 本定理归结为证明 (7) 式.

首先, 由 (6) 式可得出

$$\frac{\partial x_j}{\partial y_1} = \begin{cases} 1, & j = 1 \\ 0, & j = 2, \cdots, m \end{cases} \tag{8}$$

在 U 上成立, 并且由 (2), (3) 及 (8) 式可知, 在 U 上有

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},$$

因此当 $i=1$ 时, (7) 式成立. 下面令 $i\in\{2,\cdots,k\}, r\in\{1,\cdots,m-k\}$. 由上式, 我们有

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(Y_i(x_{k+r}))=Y_1(Y_i(x_{k+r}))=[Y_1,Y_i](x_{k+r}). \tag{9}$$

而分布 $\mathfrak{D}$ 的对合性说明存在一组 C^∞ 函数 c_{il}, 使得

$$[Y_1;Y_i]=\sum_{l=1}^{k}c_{il}Y_l,$$

从而 (9) 式变为

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(Y_i(x_{k+r}))=\sum_{l=1}^{k}c_{il}Y_l(x_{k+r}),\quad i=2,\cdots,k;r=1,\cdots,m-k. \tag{10}$$

取定 U 的一薄片, 它由 $x_2=$ 常数 $,\cdots,x_m=$ 常数所确定. 在该薄片上, $Y_i(x_{k+r})$ 仅为 x_1 的函数, 因而方程组 (10) 由 $(k-1)$ 个关于 x_1 的齐次线性微分方程所组成. 当给定初始条件后, 该方程组有唯一解. 因为方程组是齐次的, 零函数显然是它的解. 此外, 注意到每一个这样的薄片有唯一点在 $S\cap U$ 中, 并且在 $S\cap U$ 上,

$$Y_i(x_{k+r})=Z_i(w_{k+r})=0,\quad i=2,\cdots,k, \tag{11}$$

其中第一个等式由式 (4) 与 (6) 得出, 第二个则基于归纳假设, 即 S 上分布 $\mathfrak{D}_1$ 的积分流形在坐标系 $\{w_2,\cdots,w_m\}$ 中由适当的薄片给出. 根据解的唯一性, 由 (10) 式和 (11) 式便得到在 U 上诸函数 $Y_i(x_{k+r})\equiv 0$, 这里 $i=2,\cdots,k;r=1,\cdots,m-k$, 即 (7) 式成立. 依照前面的分析, 本定理得证.

将命题 2.3.1 与定理 2.3.1 结合, 便得到下列

定理 2.3.2 设 $\mathfrak{D}$ 是 m 维光滑流形 M 上的 k 维光滑分布, 则对任意点 $p\in M$, 存在点 p 的局部坐标系 $(U,x_1,\cdots,x_m)$, 使得

$$\mathfrak{D}|_U=\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_k}\right\}$$

的充要条件是 $\mathfrak{D}$ 为对合分布.

定义 2.3.4 流形 M 上分布 $\mathfrak{D}$ 的一个**极大积分流形**(N,G) 是 $\mathfrak{D}$ 的一个连通积分流形, 并且它在 M 中的像不是 $\mathfrak{D}$ 的任何其他连通积分流形的真子集, 即不存在 $\mathfrak{D}$ 的连通积分流形 (N_1,G_1)使得$G(N)$是$G_1(N_1)$ 的真子集.

定理 2.3.3. 设 $\mathfrak{D}$ 是 m 维光滑流形 M 上的一个对合的 k 维光滑分布, $p\in M$, 则经过点 p 有 $\mathfrak{D}$ 的唯一一个极大连通积分流形, 而且 $\mathfrak{D}$ 的经过点 p 的每一个连通积分流形均包含在这个极大连通积分流形之中.

证明留作练习. 读者也可参看文献 [15].

2.4 外 代 数

本节讨论实向量空间上的外代数. 外代数的概念最初是由 Grassmann 为研究线性子空间引进来的, 后来 E.Cartan 系统地发展了外微分理论, 并将它成功地应用于微分几何与微分方程的研究, 因此外代数已成为研究微分流形的有力工具. 下一节我们将把本节所介绍的概念推广到流形情形.

2.4.1 张量

定义 2.4.1 设 V 为有限维实向量空间. V 上的一个 **k 重线性函数**指的是一个映射

$$\tau : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k个} \to \mathbb{R},$$

它对于每一个变量都是线性的, 即对于任意的 $v_1, \cdots, v_k, v_j' \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned}&\tau(v_1, \cdots, v_{j-1}, \lambda v_j + \mu v_j', v_{j+1}, \cdots, v_k)\\ =& \lambda\tau(v_1, \cdots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \cdots, v_k) + \mu\tau(v_1, \cdots, v_{j-1}, v_j', v_{j+1}, \cdots, v_k),\end{aligned}$$

这里 $j = 1, \cdots, k$, τ 又称为 V 上的 **k 阶协变张量**. 1 阶协变张量就是协变 (或余) 向量. 为统一起见, 约定实数为 0 阶协变张量.

将 V 上的 k 阶协变张量所成之集记为 $\otimes^{0,k}V$. 特别 $\otimes^{0,1}V = V^*, \otimes^{0,0}V = \mathbb{R}$. 任取 $\tau, \tau_1 \in \otimes^{0,k}V, k \geqslant 1, \lambda \in \mathbb{R}$, 定义 $\tau + \tau_1$, $\lambda\tau$ 如下: 对任意的 $v_i \in V$, $1 \leqslant i \leqslant k$, 令

$$\begin{aligned}(\tau + \tau_1)(v_1, \cdots, v_k) &= \tau(v_1, \cdots, v_k) + \tau_1(v_1, \cdots, v_k),\\ (\lambda\tau)(v_1, \cdots, v_k) &= \lambda\tau(v_1, \cdots, v_k).\end{aligned}$$

易见 $\tau + \tau_1$, $\lambda\tau$ 都属于 $\otimes^{0,k}V$, 因此 $\otimes^{0,k}V$ 关于加法与数乘运算成为一个实向量空间, 称为关于 V 的 $(0,k)$ 型张量空间.

定义 2.4.2 设 $\tau \in \otimes^{0,k}V, \eta \in \otimes^{0,l}V$, 它们的**张量积**$\tau \otimes \eta \in \otimes^{0,k+l}V$ 定义为

$$(\tau \otimes \eta)(v_1, \cdots, v_{k+l}) = \tau(v_1, \cdots, v_k) \cdot \eta(v_{k+1}, \cdots, v_{k+l}),$$

其中诸 $v_i \in V$. 容易验证张量积具有下列性质:

$$\begin{aligned}&(\tau_1 + \tau_2) \otimes \eta = \tau_1 \otimes \eta + \tau_2 \otimes \eta, &&\tau_1, \tau_2 \in \otimes^{0,k}V, \eta \in \otimes^{0,l}V,\\ &\tau \otimes (\eta_1 + \eta_2) = \tau \otimes \eta_1 + \tau \otimes \eta_2, &&\tau \in \otimes^{0,k}V, \eta_1, \eta_2 \in \otimes^{0,l}V,\\ &(\lambda\tau) \otimes \eta = \tau \otimes (\lambda\eta) = \lambda(\tau \otimes \eta), &&\tau \in \otimes^{0,k}V, \eta \in \otimes^{0,l}V, \lambda \in \mathbb{R},\\ &(\tau \otimes \eta) \otimes \zeta = \tau \otimes (\eta \otimes \zeta), &&\tau \in \otimes^{0,k}V, \eta \in \otimes^{0,l}V, \zeta \in \otimes^{0,m}V,\end{aligned}$$

因而可记为 $\tau\otimes\eta\otimes\zeta$, 并且

$$\otimes^{0,k}V=\underbrace{V^*\otimes V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{k\text{个}}.$$

注意, 张量积不满足交换律, $\tau\otimes\eta=\eta\otimes\tau$ 一般不成立.

设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为向量空间 V 的基, 其对偶基为 $w_1,\cdots,w_n$, 则

$$\{w_{i_1}\otimes w_{i_2}\otimes\cdots\otimes w_{i_k}|1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_k\leqslant n\}$$

为 $\otimes^{0,k}V$ 的基, 因而 $\otimes^{0,k}V$ 是 n^k 维实向量空间.

考虑直和 $T(V^*)=\sum\limits_{k\geqslant 0}\otimes^{0,k}V$, 其元素 w 可表成形式和

$$w=\sum_{k\geqslant 0}w_k,\quad w_k\in\otimes^{0,k}V,$$

和式中除有限多个项外其余各项都是零. 这样 $T(V^*)$ 是无限维实向量空间. 张量的乘法 (即张量积) 通过分配律可以扩充为 $T(V^*)$ 中的乘法, 因而 $T(V^*)$ 关于这种乘法成为一个代数, 称为 V^* 的**张量代数**.

我们还可引入 "混合型" 张量. (r,s)- 型张量是定义在 $\underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{r\text{个}}\times\underbrace{V\times\cdots\times V}_{s\text{个}}$ 上的 $(r+s)$ 重线性函数. 同类型的张量可以相加, 张量也可乘以一个数, 因此 (r,s)–型张量组成的空间 $\otimes^{r,s}V$ 是一个实向量空间. 特别, $\otimes^{r,0}V$ 的元素是 $(r,0)$- 型张量, 称为 r 阶**反变张量**. 此外, 如同定义 2.4.2 那样引入张量积 (细节留给读者).

2.4.2 外代数 $\Lambda(V^*)$

由于 E.Cartan 系统地发展了外微分方法, 使得反对称张量在流形论的研究中显得颇为重要, 本段着重讨论反对称协变张量.

用 S_k 表示自然数 $\{1,\cdots,k\}$ 的置换群.S_k 的任意一个元素 π 可决定向量空间 $\otimes^{0,k}V$ 的一个自同态: 设 $\tau\in\otimes^{0,k}V$, 定义

$$\pi\tau(v_1,\cdots,v_k)=\tau(v_{\pi(1)},\cdots,v_{\pi(k)}),$$

其中 $v_i\in V,i=1,\cdots,k$.

定义 2.4.3 设 $\tau\in\otimes^{0,k}V$. 若对任意的 $\pi\in S_k$, 有

$$\pi\tau=\mathrm{sgn}\pi\cdot\tau,\tag{1}$$

其中 $\mathrm{sgn}\pi$ 表示变换 π 的符号, 即

$$\mathrm{sgn}\pi=\begin{cases}1, & \pi\text{是偶置换},\\ -1, & \pi\text{是奇置换},\end{cases}$$

那么 τ 称为 V 上的 **k阶反对称协变张量或k次外形式**, 它是 V 上的反对称 k 重实线性函数. 条件 (1) 等价于当交换 τ 的自变量中的任意两个向量时, τ 的值变符号.

将 V 上的所有 k 次外形式组成的空间记为 $\Lambda^k(V^*)$, 显然它是实向量空间 $\otimes^{0,k}V$ 的子空间. 约定 $\Lambda^0(V^*)=\mathbb{R}$, 并把 1 阶协变张量视为反对称的.

定义 2.4.4　设 $\zeta\in\Lambda^k(V^*),\eta\in\Lambda^l(V^*)$, 则它们的**外积(或楔积或Grassmann积)**$\zeta\wedge\eta\in\Lambda^{k+l}(V^*)$ 定义为

$$\zeta\wedge\eta(v_1,\cdots,v_{k+l})=\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\pi\in S_{k+l}}\mathrm{sgn}\pi\zeta(v_{\pi(1)},\cdots,v_{\pi(k)})\eta(v_{\pi(k+1)},\cdots,v_{\pi(k+l)}),$$

其中 $v_i\in V,i=1,\cdots,k+l$.

命题 2.4.1　外积满足下列运算规律: 设 $\zeta,\zeta_1,\zeta_2\in\Lambda^k(V^*),\eta,\eta_1,\eta_2\in\Lambda^l(V^*),\xi\in\Lambda^r(V^*)$, 则

(i) 分配律 $(\zeta_1+\zeta_2)\wedge\eta=\zeta_1\wedge\eta+\zeta_2\wedge\eta,\quad\zeta\wedge(\eta_1+\eta_2)=\zeta\wedge\eta_1+\zeta\wedge\eta_2$;

(ii) 结合律 $(\zeta\wedge\eta)\wedge\xi=\zeta\wedge(\eta\wedge\xi)$;

(iii) 反交换律 $\zeta\wedge\eta=(-1)^{kl}\eta\wedge\zeta$.

证明　(i), (ii) 留作练习, 现证 (iii). 设 $\pi_1\in S_{k+l}$ 定义为

$$(1,\cdots,k,k+1,\cdots,k+l)\mapsto(l+1,\cdots,l+k,1,\cdots,l),$$

则 $\mathrm{sgn}\pi_1=(-1)^{kl}$. 因 $\zeta\wedge\eta\in\Lambda^{k+l}(V^*),\pi_1(\zeta\wedge\eta)=\mathrm{sgn}\pi_1\cdot\zeta\wedge\eta$, 因此对任意的 $v_1,\ldots,v_{k+l}\in V$, 有

$$\begin{aligned}&\zeta\wedge\eta(v_1,\cdots,v_{k+l})=(-1)^{kl}\zeta\wedge\eta(v_{\pi_1}(1),\cdots,v_{\pi_1(k+l)})\\&=\frac{(-1)^{kl}}{(k+l)!}\sum_{\pi\in S_{k+l}}\mathrm{sgn}\pi\cdot\zeta(v_{\pi\circ\pi_1(1)},\cdots,v_{\pi\circ\pi_1(k)})\cdot\eta(v_{\pi\circ\pi_1(k+1)},\cdots,v_{\pi\circ\pi_1(k+l)})\\&=\frac{(-1)^{kl}}{(k+l)!}\sum_{\pi\in S_{k+l}}\mathrm{sgn}\pi\cdot\eta(v_{\pi(1)},\cdots,v_{\pi(l)})\cdot\zeta(v_{\pi(l+1)},\cdots,v_{\pi(k+l)})\\&=(-1)^{kl}\eta\wedge\zeta(v_1,\cdots,v_{k+l}).\end{aligned}$$

特别当 $\zeta,\eta\in\Lambda^1(V^*)=V^*$ 时, 则由反交换律有 $\zeta\wedge\eta=-\eta\wedge\zeta,\zeta\wedge\zeta=\eta\wedge\eta=0$.

设 $e_1,\cdots,e_m$ 是 m 维实向量空间 V 的基, $w_1,\cdots,w_m$ 是对偶空间 V^* 的对偶基. 下面我们说明由 V 上的 k 次外形式组成的实向量空间 $\Lambda^k(V^*)$, 当 $k>m$ 时, $\Lambda^k(V^*)=\{0\}$; 当 $1\leqslant k\leqslant m$ 时, $\dim\Lambda^k(V^*)=\mathrm{C}_m^k$, 并且

$$\{w_{i_1}\wedge\cdots\wedge w_{i_k}|1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m\}\tag{2}$$

是 $\Lambda^k(V^*)$ 的基. 事实上,

(i) 取 $\zeta \in \Lambda^k(V^*)$, 其中 $k > m$, 则对于任意 k 个基向量 $e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}$, 其中必有重复出现者, 不妨设 $e_{i_r} = e_{i_s}, r < s$, 于是

$$\zeta(e_{i_1}, \cdots, e_{i_r}, \cdots, e_{i_s}, \cdots, e_{i_k}) = -\zeta(e_{i_1}, \cdots, e_{i_s}, \cdots, e_{i_r}, \cdots, e_{i_k}),$$

因此 $\zeta(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) = 0$. 而 $e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}$ 是任取的, 故 $\zeta = 0$. 这说明 $\Lambda^k(V^*) = \{0\}$.

(ii) 设 $v_1, \cdots, v_k$ 是 V 中任意 k 个向量, $1 \leqslant k \leqslant m$, 则

$$w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k}(v_1, \cdots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \mathrm{sgn}\pi \cdot w_{i_1}(v_{\pi(1)}) \cdots w_{i_k}(v_{\pi(k)})$$
$$= \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} w_{i_1}(v_1) \ldots w_{i_1}(v_k) \\ w_{i_2}(v_1) \ldots w_{i_2}(v_k) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ w_{i_k}(v_1) \ldots w_{i_k}(v_k) \end{vmatrix}.$$

特别

$$w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k}(e_{j_1}, \cdots, e_{j_k}) = \frac{1}{k!} \det(w_{i_r}(e_{j_s}))_{1 \leqslant r, s \leqslant k} = \frac{1}{k!} \delta^{j_1, \cdots, j_k}_{i_1, \cdots, i_k}, \tag{3}$$

其中

$$\delta^{j_1, \cdots, j_k}_{i_1, \cdots, i_k} = \begin{cases} 1, & \text{当} i_1, \cdots, i_k \text{互不相同, 且} \{j_1, \cdots, j_k\} \text{是} \{i_1, \cdots, i_k\} \text{的偶排列时}, \\ -1, & \text{当} i_1, \cdots, i_k \text{互不相同, 且} \{j_1, \cdots, j_k\} \text{是} \{i_1, \cdots, i_k\} \text{的奇排列时}, \\ 0, & \text{其他情形} \end{cases}$$

称为广义的 kronecker 符号.

由 (3) 式得到

$$w_1 \wedge \cdots \wedge w_m(e_1, \cdots, e_m) = \frac{1}{m!},$$

故 $w_1 \wedge \cdots \wedge w_m \neq 0$. 对于 $k < m$, 如果 $\{w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k} | 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant m\}$ 线性相关, 那么存在不全为零的一组实数 $\{a_{i_1} \cdots {}_{i_k}\}$, 使得

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m} a_{i_1} \cdots {}_{i_k} w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k} = 0. \tag{4}$$

不妨设其中一个不为零的实数是 $a_{j_1 \cdots j_k}, 1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant m$. 假定与它相补的指标组是 $l_1 < \cdots < l_{m-k}$, 这意指 $\{j_1, \cdots, j_k, l_1, \cdots, l_{m-k}\}$ 恰好为 $\{1, \cdots, m\}$ 的一个排列, 用 $w_{l_1} \wedge \cdots \wedge w_{l_{m-k}}$ 外乘 (4) 式两边, 得

$$a_{j_1 \cdots j_k} w_{j_1} \wedge \cdots \wedge w_{j_k} \wedge w_{l_1} \wedge \cdots \wedge w_{l_{m-k}} = \pm a_{j_1} \cdots {}_{j_k} w_1 \wedge \cdots \wedge w_m = 0,$$

从而 $a_{j_1\cdots j_k}=0$, 这和 $a_{j_1\cdots j_k}\neq 0$ 相矛盾, 说明 $\Lambda^k(V^*)$ 中的向量组 (2) 是线性无关的. 此外, 可以证明 $\Lambda^k(V^*)$ 中的任意 k 次外形式可用 k 次外形式组 (2) 来线性表示 (留作练习).

将上面所述整理为下列

命题 2.4.2 设 V 为 m 维实向量空间, $w_1,\cdots,w_m$ 为对偶空间 V^* 的基, 则

(i) 当 $1\leqslant k\leqslant m$ 时, $\{w_{i_1}\wedge\cdots\wedge w_{i_k}|1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m\}$ 为实向量空间 $\Lambda^k(V^*)$ 的基, 且 $\dim\Lambda^k(V^*)=\mathrm{C}_m^k$,

(ii) 当 $k>m$ 时, $\Lambda^k(V^*)=\{0\}$.

用 $\Lambda(V^*)$ 记形式和 $\sum\limits_{k=0}^{m}\Lambda^k(V^*)$, 易见它是一个 2^m 维实向量空间. 设

$$\zeta=\sum_{r=0}^{m}\zeta_r,\eta=\sum_{s=0}^{m}\eta_s,$$

其中 $\zeta_r\in\Lambda^r(V^*),\eta_s\in\Lambda^s(V^*)$, 令 ζ 和 η 的外积

$$\zeta\wedge\eta=\sum_{r,s=0}^{m}\zeta_r\wedge\eta_s,$$

则 $\Lambda(V^*)$ 关于外积成为一个实代数, 称为 V^* 的**外代数或Grassmann 代数**, 其元素称为 V 上的外形式.

命题 2.4.3 设 $f:V\to W$ 是从向量空间 V 到 W 的线性映射, 则 f 诱导外代数 $\Lambda(W^*)$ 到 $\Lambda(V^*)$ 的代数同态 $f^*:\Lambda(W^*)\to\Lambda(V^{*})$.

证明 首先定义从外形式空间 $\Lambda^k(W^*)$ 到 $\Lambda^k(V^*)$ 的映射 f^*. 设 $\zeta\in\Lambda^k(W^*)$, 令

$$f^*\zeta(v_1,\cdots,v_k)=\zeta(f(v_1),\cdots,f(v_k)),\tag{5}$$

其中 $v_1,\cdots,v_k\in V$. 易见 $f^*:\Lambda^k(W^*)\to\Lambda^k(V^*)$ 是线性映射. 若能证明 f^* 和外积运算可以交换, 那么 f^* 便是从外代数 $\Lambda(W^*)$ 到 $\Lambda(V^*)$ 的代数同态. 下面证明: 对任意的 $\zeta\in\Lambda^k(W^*)$, $\eta\in\Lambda^l(W^*)$, 有

$$f^*(\zeta\wedge\eta)=f^*\zeta\wedge f^*\eta.\tag{6}$$

任取 $v_1,\cdots,v_{k+l}\in V$, 则

$$\begin{aligned}
&f^*(\zeta\wedge\eta)(v_1,\cdots,v_{k+l})\\
&=\zeta\wedge\eta(f(v_1),\cdots,f(v_{k+l}))\\
&=\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\pi\in S_{k+l}}\mathrm{sgn}\pi\cdot\zeta(f(v_{\pi(1)}),\cdots,f(v_{\pi(k)}))\cdot\eta(f(v_{\pi(k+1)}),\cdots,f(v_{\pi(k+l)}))\\
&=\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\pi\in S_{k+l}}\mathrm{sgn}\pi\cdot f^*\zeta(v_{\pi(1)},\cdots,v_{\pi(k)})\cdot f^*\eta(v_{\pi(k+1)},\cdots,v_{\pi(k+l)})\\
&=f^*\zeta\wedge f^*\eta(v_1,\cdots,v_{k+l}),
\end{aligned}$$

所以 (6) 式成立.

2.4.3 $\Lambda(V^*)$ 中的内乘运算

设 $\{e_1,\cdots,e_m\}$ 是 m 维向量空间 V 的基, 其对偶基为 $w_1,\cdots,w_m$, 又 $v\in V$. 对满足 $1\leqslant k\leqslant m$ 的所有 k, 存在一个从 $\Lambda^k(V^*)$ 到 $\Lambda^{k-1}(V^*)$ 的线性映射 $i(v)$, 称为乘以 v 的内乘法, 其定义是: 对于 $\zeta\in\Lambda^k(V^*)$ 及 $v_1,\cdots,v_{k-1}\in V$,

$$(i(v)(\zeta))\,(v_1,\cdots,v_{k-1})=\zeta(v,v_1,\cdots,v_{k-1}).$$

特别, 当 $\zeta\in\Lambda^1(V^*)=V^*$ 时, $i(v)(\zeta)\in\mathbb{R}$, 而且 $i(v)(\zeta)=\zeta(v)$.

$i(v)$ 作为 $\Lambda(V^*)$ 中的算子具有下列性质:

$$i(v)(\zeta\wedge\eta)=(i(v)(\zeta))\wedge\eta+(-1)^k\zeta\wedge(i(v)(\eta))\,,\zeta\in\Lambda^k(V^*),\quad \eta\in\Lambda(V^*),\tag{7}$$

因而 $i(v)$ 称为**反求导算子**. 而等式 (7) 成立当且仅当在 $\Lambda(V^*)$ 的基元素上有

$$i(v)(w_{i_1}\wedge\cdots\wedge w_{i_k})=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}w_{i_1}\wedge\cdots\wedge i(v)w_{i_j}\wedge\cdots\wedge w_{i_k}.\tag{8}$$

为简单起见, 将下标 i_j 简记成 j. 要证 (8) 式成立, 取 $v_2,\cdots,v_k\in V$, 并记 $v=v_1$, 我们有

$$(i(v)(w_1\wedge\cdots\wedge w_k))\,(v_2,\cdots,v_k)=w_1\wedge\cdots\wedge w_k(v,v_2,\cdots,v_k)=\frac{1}{k!}\det(w_r(v_s))_{1\leqslant r,s\leqslant k},$$

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}w_1\wedge\cdots\wedge i(v)w_j\wedge\cdots\wedge w_k\right)(v_2,\cdots,v_k)\\
=&\left(\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}w_j(v)w_1\wedge\cdots\wedge\hat{w}_j\wedge\cdots\wedge w_k\right)(v_2,\cdots,v_k)\\
=&\left(\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}w_j\wedge w_1\wedge\cdots\wedge\hat{w}_j\wedge\cdots\wedge w_k\right)(v,v_2,\cdots,v_k)\\
=&\ \frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}w_j(v)\det(w_r(v_s))\quad\left(r=1,\cdots,\hat{j},\cdots,k,s=2,\cdots,k\right)\\
=&\ \frac{1}{k!}\det(w_r(v_s))_{1\leqslant r,s\leqslant k}.
\end{aligned}$$

由上可见, (8) 式两边在任意 $(v_2,\cdots,v_k)\in\underbrace{V\times\cdots\times V}_{(k-1)\text{个}}$ 上取值相同, 故 (8) 式成立.

特别, 当 $\zeta \in \Lambda^m(V^*)$ 且 $v = \sum_{j=1}^{m} a_j e_j$ 时,

$$(i(v)(\zeta))(e_1, \cdots, \hat{e}_i, \cdots, e_m) = \zeta\left(\sum_{j=1}^{m} a_j e_j, e_1, \cdots, \hat{e}_i, \cdots, e_m\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} a_i \zeta(e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_m).$$

由于 $\zeta \in \Lambda^m(V^*)$, 所以存在实数 a, 使得 $\zeta = a(w_1 \wedge \cdots \wedge w_m)$, 从而

$$i\left(\sum_{j=1}^{m} a_j e_j\right)(\zeta) = a\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} a_i w_1 \wedge \cdots \wedge \hat{w}_i \wedge \cdots \wedge w_m. \tag{9}$$

注意到 $\{w_1 \wedge \cdots \wedge \hat{w}_i \wedge \cdots \wedge w_m | i = 1, \cdots, m\}$ 是 $\Lambda^{m-1}(V^*)$ 的基, 由 (9) 式立即得到下列命题.

命题 2.4.4　设 $\zeta \in \Lambda^m(V^*), \zeta \neq 0$, 则映射 $v \mapsto i(v)\zeta$ 是从 V 到 $\Lambda^{m-1}(V^*)$ 上的一个同构.

2.5 微分形式

2.5.1 微分 1- 形式

定义 2.5.1　光滑流形 M 上的一个**微分 1- 形式**是一个映射 $\omega : M \to T^*M$, 满足 $\pi' \circ \omega = id_M$, 其中 T^*M 为 M 的余切丛, $\pi' : T^*M \to M$ 为自然投影.

如果 $\omega : M \to T^*M$ 是 C^∞ 映射, 则称 ω 为 M 上的**光滑 1- 形式**或 **C^∞ 1- 形式**. 等价地, 微分 1- 形式 ω 是光滑的, 如果对于 M 上的任意光滑向量场 X, $\omega(X)$ 为 M 上的 C^∞ 函数, 这里 $\omega(X)$ 定义为 $\omega(X)(p) = \omega_p(X_p), p \in M$. 简言之, M 上的一个光滑 1- 形式就是余切丛 T^*M 的一个光滑截面.

将 M 上的所有光滑 1- 形式记为 $C^\infty(M, T^*M)$. 设 $\omega, \omega' \in C^\infty(M, T^*M), \lambda \in \mathbb{R}$, 定义 $\omega + \omega', \lambda\omega$ 为: 对任意 $p \in M, (\omega + \omega')_p = \omega_p + \omega'_p, (\lambda\omega)_p = \lambda\omega_p$, 那么 $C^\infty(M, T^*M)$ 在逐点相加和数乘运算下, 构成实数域上的向量空间. 假若上式中的 λ 是 M 上的 C^∞ 函数, 规定 $(\lambda\omega)_p = \lambda(p)\omega_p$, $p \in M$, 那么 $C^\infty(M, T^*M)$ 是环 $C^\infty(M)$ 上的模.

下面讨论光滑 1- 形式的局部坐标表示. 设 $(U, x_1, \cdots, x_m)$ 为 M 的一个局部坐标系. 由命题 1.3.3 知, 在 U 中的每一点, $\{\mathrm{d}x_i | i = 1, \cdots, m\}$ 是余切空间的基, 且对偶于 $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\middle| i = 1, \cdots, m\right\}$, 并且 $\mathrm{d}x_i \in C^\infty(U, T^*U)$. 现假定 $\omega \in C^\infty(U, T^*U)$, 则

存在 U 上的函数 $a_i(i=1,\cdots,m)$, 使得

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathrm{d}x_i,$$

并且

$$a_i = \left(\sum_{j=1}^{m} a_j \mathrm{d}x_j\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \in C^\infty(U).$$

此外, 对于 $f \in C^\infty(M)$, 由命题 1.3.3, 在 M 的一个局部坐标系 $(U, x_1, \cdots, x_m)$ 下,

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i,$$

因而 $\mathrm{d}f$ 是 M 上的一个光滑 1- 形式.

2.5.2 丛 $\Lambda^k(T^*M)$

流形 M 上的微分 1- 形式是余切丛 T^*M 的截面. 为引入 M 上的微分 $k-$ 形式, 先介绍 M 上的 k 次外形式丛. 令

$$\Lambda^k(T^*M) = \bigcup_{p\in M} \Lambda^k(T_p^*M),$$

这是所有 $\Lambda^k(T_p^*M)$ 的并集. 定义自然投影 $\widetilde{\pi} : \Lambda^k(T^*M) \to M$ 如下: 设 $\omega \in \Lambda^k(T^*M)$, 则存在唯一的 $p \in M$, 使得 $\omega \in \Lambda^k(T_p^*M)$, 令 $\widetilde{\pi}(\omega) = p$, 于是在点 p 处的纤维 $\widetilde{\pi}^{-1}(\{p\}) = \Lambda^k(T_p^*M)$ 是一个 C_m^k 维实向量空间, 其中 $m = \dim M$. 采用 2.1.1 中对于切丛 TM 的同样手法, 赋予 $\Lambda^k(T^*M)$ 流形结构, 使之成为一个 $(m + \mathrm{C}_m^k)$ 维光滑流形.

设 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_m)$ 是 M 的任意一个坐标卡. 对于 $p \in U$, 令 $\theta_p : T_pM \to \mathbb{R}^m$ 为典范同构, 如 2.1.1 中 (1) 式所示. 定义

$$\widetilde{\tau}_\varphi : \widetilde{\pi}^{-1}(U) = \bigcup_{p\in U} \Lambda^k(T_p^*M) \to \mathbb{R}^m \times \Lambda^k(\mathbb{R}^m)^*$$

如下: 对 $\omega \in \widetilde{\pi}^{-1}(U)$, 令

$$\widetilde{\tau}_\phi(\omega) = \left(\varphi(\widetilde{\pi}(\omega)), (\theta_{\widetilde{\pi}(\omega)}^{-1})^*\right),$$

记 $\widetilde{\pi}(\omega) = p$, $\left(\theta_p^{-1}\right)^* : \Lambda^k(T_p^*M) \to \Lambda^k(\mathbb{R}^m)^*$ 如命题 2.4.3 中 (5) 式所定义.

$\widetilde{\tau}_\varphi = (\varphi \circ \widetilde{\pi}, (\theta_{\widetilde{\pi}(\cdot)}^{-1})^*)$ 是单射, 又 $\widetilde{\tau}_\varphi\left(\widetilde{\pi}^{-1}(U)\right) = \varphi(U) \times \Lambda^k(\mathbb{R}^m)^*$, 所以 $\widetilde{\tau}_\varphi$ 是从 $\widetilde{\pi}^{-1}(U)$ 到 $\mathbb{R}^m \times \Lambda^k(\mathbb{R}^m)^*$ $\left(\text{同构于}\mathbb{R}^{m+C_m^k}\right)$ 中开子集 $\varphi(U) \times \Lambda^k(\mathbb{R}^m)^*$ 上的双射.

类似于定理 2.1.1 的证明, 赋予 $\Lambda^k(T^*M)$ 拓扑结构与微分结构, 当 (U,φ) 遍历 M 的坐标卡时, $\{\widetilde{\pi}^{-1}(U),\widetilde{\tau}_\varphi\}$ 构成 $\Lambda^k(T^*M)$ 的坐标卡集. 这里我们仅补充坐标卡的相容性.

取定 $(\widetilde{\pi}^{-1}(U),\widetilde{\tau}_\varphi)$ 与 $(\widetilde{\pi}^{-1}(V),\widetilde{\tau}_\psi)$, 它们分别对应于 M 的两个坐标卡 (U,φ) 和 (V,ψ), 并设典范同构 θ,η 分别关联于 (U,φ) 和 (V,ψ), 于是

$$\widetilde{\tau}_\varphi=(\varphi\circ\widetilde{\pi},(\theta^{-1}_{\widetilde{\pi}(\cdot)})^*),\quad \widetilde{\tau}_\psi=(\psi\circ\widetilde{\pi},(\eta^{-1}_{\widetilde{\pi}(\cdot)})^*).$$

据 2.1.1 中 (2) 式, 我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{\tau}_\psi\circ\widetilde{\tau}_\varphi^{-1}&=\left(\psi\circ\varphi^{-1},(\eta^{-1}_{\widetilde{\pi}(\cdot)})^*\circ\left((\theta^{-1}_{\widetilde{\pi}(\cdot)})^*\right)^{-1}\right)\\&=(\psi\circ\varphi^{-1},(\theta_{\widetilde{\pi}(\cdot)}\circ\eta^{-1}_{\widetilde{\pi}(\cdot)})^*)\\&=(\psi\circ\varphi^{-1},(d(\varphi\circ\psi^{-1})\circ\psi\circ\widetilde{\pi})^*).\end{aligned}$$

由此可见, $\widetilde{\tau}_\psi\circ\widetilde{\tau}_\varphi^{-1}\in C^\infty$.

注意到

$$\widetilde{\tau}_\varphi:\widetilde{\pi}^{-1}(U)\to\varphi(U)\times\Lambda^k(\mathbb{R}^m)^*$$

是一个 C^∞ 微分同胚, 因而 $\widetilde{\pi}^{-1}(U)$ 必微分同胚于 $U\times\Lambda^k(\mathbb{R}^m)^*$. 依定义 2.1.1, $\Lambda^k(T^*M)$ 是 M 上的一个 C_m^k 维 C^∞ 实向量丛.

2.5.3 外微分形式

定义 2.5.2 设 M 是 m 维光滑流形. 如果映射 $\omega:M\to\Lambda^k(T^*M)$ 使得 $\widetilde{\pi}\circ\omega=id_M$, 则 ω 称为 M 上的一个**微分k - 形式**. 若 ω 还是 C^∞ 映射, 则 ω 称为 M 上的 **k次C^∞外微分形式**, 它是 k 次外形式从 $\Lambda^k(T^*M)$ 的光滑截面.

设 $(U,x_1,\cdots,x_m)$ 是 M 的一个局部坐标系, 则对每一 $p\in U,\{\mathrm{d}x_1,\cdots,\mathrm{d}x_m\}$ 是 T_p^*M 的一个基, 并且

$$\{\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}|1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m\}$$

是 $\Lambda^k(T_p^*M)$ 的基, 于是 M 上的每个光滑 k- 形式 ω 在 U 上的限制可以表示为

$$\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m}a_{i_1}\dots{}_{i_k}\,\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k},$$

其中每个 $a_{i_1}\dots{}_{i_k}$ 是 U 上的光滑函数.

特别, U 上的每个光滑 m- 形式可表为 $\omega=a\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_m$, 其中 $a\in C^\infty(U)$. 此外, 光滑 0- 形式就是一个光滑函数.

将 k 次外形式丛 $\Lambda^k(T^*M)$ 的光滑截面所成的空间记为 $A^k(M)$, 显然它是环 $C^\infty(M)$ 上的模.

我们还可考虑 M 上的外形式丛

$$\Lambda(T^*M) = \bigcup_{p\in M} \Lambda(T_p^*M),$$

它是 M 上的 C^∞ 实向量丛. 将它的光滑截面所成空间记为 $A(M)$, 其元素称为 M 上的 C^∞ **外微分形式**. 显然, $A(M)$ 可表成直和

$$A(M) = \sum_{k=0}^{m} A^k(M), \tag{1}$$

即每一个 C^∞ 外微分形式 ω 可以写为

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_m,$$

其中 $\omega_k \in A^k(M), k = 0, 1, \cdots, m$. 外形式的外积运算可以推广到外微分形式空间 $A(M)$. 设 $\omega, \widetilde{\omega} \in A(M)$, 令

$$\omega \wedge \widetilde{\omega}(p) = \omega(p) \wedge \widetilde{\omega}(p), \quad p \in M,$$

等式右端是两个外形式的外积, 易见 $\omega \wedge \widetilde{\omega} \in A(M)$. 空间 $A(M)$ 关于加法、数乘以及外积运算成为一个代数, 而且是一个分次代数. 所谓"分次"是说 $A(M)$ 是一列向量空间的直和 (1), 且外积 $\wedge$ 给出了映射 $\wedge: A_k(M) \times A_l(M) \to A_{k+l}(M)$. 当 $k + l > m$ 时, 约定 $A_{k+l}(M) = 0$.

2.5.4 外微分

外微分形式空间 $A(M)$ 在流形论中之所以重要, 是因为在 $A(M)$ 中有外微分运算 d, 并且 d 连续作用两次为零. 对于流形 M 上的任何 C^∞ 函数 f, 我们知道 $\mathrm{d}f$ 是 M 上的光滑 1- 形式, 因此可以说算子 $\mathrm{d}: A^0(M) \to A^1(M)$ 是把 M 上的 0- 形式映为 1- 形式. 现在我们将这一算子推广到 $A(M)$ 中.

定理 2.5.1 设 M 为 m 维 C^∞ 流形, 则存在唯一的线性映射

$$\mathrm{d}: A(M) \to A(M),$$

称为**外微分**, 使得下列性质成立:

(i) $\mathrm{d}: A^k(M) \to A^{k+1}(M)$,

(ii) 对于 $f \in C^\infty(M), \mathrm{d}(f) = \mathrm{d}f$(通常的微分).

(iii) 设 $\omega \in A^k(M), \tau \in A(M)$, 则 $\mathrm{d}(\omega \wedge \tau) = \mathrm{d}\omega \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\tau$,

(iv) $\mathrm{d}^2 = \mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$.

为证明本定理, 先证明下列引理. 该引理是说, 对于每一个外微分算子 d, $(\mathrm{d}\omega)(p)$ 只依赖于 ω 在点 p 的一个小邻域内的性态.

引理 2.5.1 设 $\mathrm{d}: A(M) \to A(M)$ 为外微分, 如定理 2.5.1 中所述. 若 $\omega \in A(M)$ 对于某个开集 $W \subset M$ 满足 $\omega|_W = 0$, 则 $(\mathrm{d}\omega)|_W = 0$. 因此, 如果 $\omega, \tau \in A(M)$ 限制在开集 W 上, 有 $\omega|_W = \tau|_W$, 则 $(\mathrm{d}\omega)|_W = (\mathrm{d}\tau)|_W$.

证明 假设 $\omega|_W = 0$. 取 $p \in W$，利用流形的局部紧致性, 必有包含点 p 的开邻域 V, 使得 $\overline{V}$ 是紧致的, 并且 $p \in V \subset \overline{V} \subset W$. 由引理 1.2.2, 存在流形 M 上的光滑函数 $f: M \to \mathbb{R}$, 使得当 $q \in \overline{V}$ 时, $f(q) = 1$; 当 $q \in W - \overline{V}$ 时, $0 < f(q) < 1$; 当 $q \in M - W$ 时, $f(q) = 0$. 于是 $f\omega$ 在 M 上恒为 0, 并且

$$0 = \mathrm{d}(f\omega) = (\mathrm{d}f) \wedge \omega + f\mathrm{d}\omega,$$

在点 p 取值得 $(\mathrm{d}\omega)(p) = 0$. 由于点 $p \in W$ 是任取的, 故 $(\mathrm{d}\omega)|_W = 0$. 由此可推出：若 $\omega|_W = \tau|_W$, 即 $(\omega - \tau)|_W = 0$, 则 $0 = [\mathrm{d}(\omega - \tau)]|_W = [\mathrm{d}\omega - \mathrm{d}\tau]|_W$, 即 $(\mathrm{d}\omega)|_W = (\mathrm{d}\tau)|_W$.

定理 2.5.1 的证明

1° 唯一性 假设 $\mathrm{d}: A(M) \to A(M)$ 满足定理所述性质. 取点 $p \in M$, 并设 $(U, x_1, \cdots, x_m)$ 是围绕点 p 的一个局部坐标系. 若 ω 为 M 上的光滑 k- 形式, 则 ω 在 U 上的限制可表为

$$\omega|_U = \sum a_{i_1 \cdots i_k} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k},$$

其中诸 $a_{i_1} \ldots_{i_k} \in C^\infty(U)$. 现在此式的右边不是 M 上的微分形式, 因此不能用 d 直接作用于它. 不过利用流形的局部紧致性, 必存在包含点 p 的开邻域 U_1, 使得 $\overline{U}_1$ 是紧致的, 且 $\overline{U}_1 \subset U$. 选取 $g \in C^\infty(M)$ 满足：$0 \leqslant g \leqslant 1$, 并且当 $q \in U_1$ 时, $g(q) = 1$, 当 $q \notin U$ 时, $g(q) = 0$. 令 $\widetilde{\omega} \in A^k(M)$ 定义为

$$\widetilde{\omega} = \sum (g a_{i_1 \cdots i_k}) \mathrm{d}(g x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(g x_{i_k}).$$

需说明的是, 对于 U 上的 C^∞ 函数 h, gh 表示 M 上的 C^∞ 函数, 这里 gh 定义为

$$(gh)(q) = \begin{cases} g(q)h(q), & q \in U, \\ 0, & q \notin U. \end{cases}$$

显然, $\widetilde{\omega}|_{U_1} = \omega|_{U_1}$. 由引理 2.5.1, $(\mathrm{d}\widetilde{\omega})|_{U_1} = (\mathrm{d}\omega)|_{U_1}$. 现在

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\widetilde{\omega} &= \sum \mathrm{d}(g a_{i_1 \cdots i_k} \mathrm{d}(g x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(g x_{i_k})) \\
&= \sum \mathrm{d}(g a_{i_1 \cdots i_k}) \wedge \mathrm{d}(g x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(g x_{i_k}) + \sum g a_{i_1 \cdots i_k} \mathrm{d}\left(\mathrm{d}(g x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(g x_{i_k})\right) \\
&= \sum \mathrm{d}(g a_{i_1 \cdots i_k}) \wedge \mathrm{d}(g x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}(g x_{i_k})
\end{aligned}$$

第一个等式是因为 d 是线性算子, 第二个等式是据性质 (iii), 而其中的第二个和式中的每一项均为零是依据性质 (iii) 及 (iv) 得到的.

由于 $(\mathrm{d}\omega)|_{U_1} = (\mathrm{d}\widetilde{\omega})|_{U_1}$, 且 g 在 U_1 上恒等于 1, 所以

$$(\mathrm{d}\omega)|_{U_1} = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{i_1\cdots i_k})\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}.$$

由此可知, 如果 d 存在, 那么在点 p 处它作用于 k- 形式上所得的值必由上述公式给出. 因为点 p 是 M 中任意点, 又因为每一个微分形式是诸 k- 形式的和 $(k = 0, 1, \cdots, m)$, 因此唯一性成立.

2° 存在性　首先局部地来定义 d. 设 $(U, x_1, \cdots, x_m)$ 是 M 的一个局部坐标系 (注意 U 自身是一个光滑流形). 定义

$$\mathrm{d}_U : A(U) \to A(U)$$

如下: 对于 $\omega = \sum\limits_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \in A^k(U)$, 规定

$$\mathrm{d}_U\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_{i_1\cdots i_k})\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}, \tag{2}$$

然后线性扩张到 $A(U)$ 上. 性质 (i) 和 (ii) 显然满足. 为验证 (iii) 和 (iv), 首先注意 $A(U)$ 中的每一形式都是形如 $a_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$ 的形式之和. 由 d_U 的线性性与外积关于加法的分配律, 只需对上述这种形式验证 (iii) 与 (iv). 假设

$$\mu = a_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}, \tau = b_{j_1\cdots j_l}\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_l},$$

那么

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_U(\mu \wedge \tau) =& \mathrm{d}_U(a_{i_1\cdots i_k}b_{j_1\cdots j_l}\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_l}) \\
=& \sum_{r=1}^{m}\left(\frac{\partial}{\partial x_r}(a_{i_1\cdots i_k})b_{j_1\cdots j_l} + a_{i_1\cdots i_k}\frac{\partial}{\partial x_r}(b_{j_1\cdots j_l})\right) \\
& \cdot \mathrm{d}x_r \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_l} \\
=& \left(\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_r}(a_{i_1\cdots i_k})\mathrm{d}x_r \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}\right) \wedge (b_{j_1\cdots j_l}\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_l}) \\
& + (-1)^k(a_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k})\wedge \\
& \left(\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_r}(b_{j_1\cdots j_l})\mathrm{d}x_r \wedge \mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_l}\right) = (\mathrm{d}_U\mu) \wedge \tau + (-1)^k\mu \wedge \mathrm{d}_U\tau.
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_U^2\mu =& \mathrm{d}_U\left(\sum_{r=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_r}(a_{i_1\cdots i_k})\mathrm{d}x_r \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}\right) \\
=& \sum_{r,s=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial}{\partial x_r}(a_{i_1\cdots i_k})\right)\mathrm{d}x_s \wedge \mathrm{d}x_r \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}.
\end{aligned}$$

在这个式子中, 对应于 $r=s$ 的项自然为零. 而当 $r\neq s$ 时,

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial}{\partial x_r}(a_{i_1\cdots i_k})=\frac{\partial}{\partial x_r}\frac{\partial}{\partial x_s}(a_{i_1\cdots i_k}),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial}{\partial x_r}(a_{i_1\cdots i_k})\mathrm{d}x_s\wedge\mathrm{d}x_r=-\frac{\partial}{\partial x_r}\frac{\partial}{\partial x_s}(a_{i_1\cdots i_k})\mathrm{d}x_r\wedge\mathrm{d}x_s,$$

因此其余各项两两抵消.

由此可见, 算子 d_U 具有性质 (i)~(iv). 由唯一性可知, $A(U)$ 上具有这些性质的每一个线性算子由公式 (2) 给出. 特别, 对于 U 的任意开子集 U_1 以及 M 上任意微分形式 ω, 我们有

$$\mathrm{d}_{U_1}(\omega|_{U_1})=(\mathrm{d}_U(\omega|_U))|_{U_1}.$$

这一关系使我们能够对所有的 $\omega\in A(M)$ 以及任意坐标邻域 U, 用 $(\mathrm{d}\omega)|_U=\mathrm{d}_U(\omega|_U)$ 来整体地定义 d. 这个 d 是完全确定的, 因为当 U 和 V 是有重叠的坐标邻域时,

$$(\mathrm{d}_U\ (\omega|_U))|_{U\cap V}=\mathrm{d}_{U\cap V}(\omega|_{U\cap V})=(\mathrm{d}_V(\omega|_V))|_{U\cap V}.$$

由于对每个 U 而言, d_U 都具有性质 (i)~(iv), 因此 d 满足性质 (i)~(iv).

例 1　设 (x,y,z) 是 $\mathbb{R}^3$ 中的笛卡儿坐标.

1) 若 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, 则 $\mathrm{d}f=\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$, f 的梯度 $\mathrm{grad}f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$.

2) 若 $\omega_1=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y+C\mathrm{d}z$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑 1- 形式, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega_1&=\mathrm{d}A\wedge\mathrm{d}x+\mathrm{d}B\wedge\mathrm{d}y+\mathrm{d}C\wedge\mathrm{d}z\\&=\left(\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial A}{\partial z}-\frac{\partial C}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial B}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

记 $X=(A,B,C)$, 则向量场 X 的旋度 $\mathrm{curl}X=\left(\dfrac{\partial C}{\partial y}-\dfrac{\partial B}{\partial z},\dfrac{\partial A}{\partial z}-\dfrac{\partial C}{\partial x},\dfrac{\partial B}{\partial x}-\dfrac{\partial A}{\partial y}\right)$.

3) 若 $\omega_2=A\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+B\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+C\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑 2- 形式, 则

$$\mathrm{d}\omega_2=\left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\mathrm{div}X\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,$$

其中 $\mathrm{div}X$ 表向量场 $X=(A,B,C)$ 的散度.

依据外微分算子 d 的重要性质: $\mathrm{d}^2=0$, 立即得到场论的两个基本公式. 设 f 是 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑函数, X 是 $\mathbb{R}^3$ 上的光滑向量场, 则

$$\begin{cases}\mathrm{curl}(\mathrm{grad}f)=0,\\\mathrm{div}(\mathrm{curl}X)=0.\end{cases}$$

设 M 和 N 是 C^∞ 流形, $F: M \to N$ 为 C^∞ 映射, 则它可诱导出外微分形式空间之间的线性映射 $F^*: A(N) \to A(M)$, 现定义如下.

对于 $f \in A^0(N) = C^\infty(N)$, 令 $F^*(f) = f \circ F$;

对于 $\omega \in A^k(N)(k > 0)$, 令

$$(F^*\omega)_p(X_1(p), \cdots, X_k(p)) = \omega_{F(p)}\left((\mathrm{d}F)_p(X_1(p)), \cdots, (\mathrm{d}F)_p(X_k(p))\right),$$

其中 $X_1, \cdots, X_k$ 为 M 上的光滑向量场, $p \in M$.

易见 $F^*\omega \in A^k(M)$, 并且 $F^*:A^k(N) \to A^k(M)$ 是线性映射. 然后依线性性将 F^* 扩充到 $A(N)$ 上. 事实上, $F^*: A(N) \to A(M)$ 还是一个代数同态, 因为由命题 2.4.3 可推出映射 F^* 与外积是可交换的, 即对任意 $\omega, \eta \in A(N)$, 有

$$F^*(\omega \wedge \eta) = F^*\omega \wedge F^*\eta.$$

诱导映射 F^* 的重要性还在于它与外微分算子 d 可交换.

定理 2.5.2 设 $F: M \to N$ 是从光滑流形 M 到 N 的光滑映射, 则诱导映射 $F^*: A(N) \to A(M)$ 和外微分 d 可交换, 即

$$F^* \circ \mathrm{d} = \mathrm{d} \circ F^*: A(N) \to A(M). \tag{3}$$

或者说有下列交换图表

$$\begin{array}{ccc} A(N) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & A(N) \\ {\scriptstyle F^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F^*} \\ A(M) & \xrightarrow[\mathrm{d}]{} & A(M) \end{array}$$

证明 由于 F^* 和 d 都是线性的, 只要考虑 (3) 式两边对单项式 ω 的作用.

1° 设 $\omega = f \in A^0(N)$, 即 $f \in C^\infty(N)$. 任取 M 上的光滑向量场 X, 则

$$F^*(\mathrm{d}f)(X) = \mathrm{d}f(\mathrm{d}F(X)) = \mathrm{d}(f \circ F)(X) = \mathrm{d}(F^*f)(X),$$

所以

$$F^* \circ \mathrm{d}(f) = \mathrm{d} \circ F^*(f).$$

2° 设 $\omega = f\mathrm{d}g$, 其中 $f, g \in C^\infty(N)$, 则

$$\begin{aligned} F^*(\mathrm{d}\omega) &= F^*(\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g) = F^*\mathrm{d}f \wedge F^*\mathrm{d}g \\ &= \mathrm{d}(F^*f) \wedge \mathrm{d}(F^*g) = \mathrm{d}(F^*\omega). \end{aligned}$$

3° 假定 (3) 式对次数 $< k$ 的外微分形式成立, 现证明它对 $k-$ 形式亦成立. 设 $\omega \in A^k(N)$ 为 k 次单项式, 写为

$$\omega = \omega_1 \wedge \omega_2,$$

其中 $\omega_1 \in A^1(N), \omega_2 \in A^{k-1}(N)$. 由归纳假设得

$$\begin{aligned} \mathrm{d} \circ F^*(\omega_1 \wedge \omega_2) &= \mathrm{d}(F^*\omega_1 \wedge F^*\omega_2) \\ &= \mathrm{d}(F^*\omega_1) \wedge F^*\omega_2 - F^*\omega_1 \wedge \mathrm{d}(F^*\omega_2) \\ &= F^*(\mathrm{d}\omega_1 \wedge \omega_2) - F^*(\omega_1 \wedge \mathrm{d}\omega_2) \\ &= F^* \circ \mathrm{d}(\omega_1 \wedge \omega_2). \end{aligned}$$

2.5.5 黎曼度量

以上我们讨论流形上光滑的 k 次外微分形式实际上就是光滑的反对称 k 阶协变张量场, 现在我们介绍对称的协变张量场的一个重要例子, 即黎曼度量.

定义 2.5.3 设 M 为 m 维微分流形. 如果对 M 的每个点 p, 指定切空间 T_pM 上一个 $(0,2)$ 型张量, 即 T_pM 上的双线性函数 $g_p = <,>_p$: $T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}, (X_p, Y_p) \mapsto g_p(X_p, Y_p) = < X_p, Y_p >_p$, 满足

(i) 对称性　$g_p(X_p, Y_p) = g_p(Y_p, X_p)$,

(ii) 正定性　$g_p(X_p, X_p) \geqslant 0$, 并且 $g_p(X_p, X_p) = 0 \Leftrightarrow X_p = 0$,

即在 M 的每一点的切空间上指定了正定内积, 并且要求

(iii) 内积 $<,>$ 是光滑的, 即对于 M 上的任意光滑向量场 X, Y, 映射 $p \mapsto < X, Y >_p = < X(p), Y(p) >_p$ 是 M 上的光滑函数.

那么我们说 $g = <,>$ 为 M 上的一个**黎曼度量**. 简言之, M 上的一个光滑的对称正定的 2 阶协变张量场称为**黎曼度量**(或**黎曼结构**). 定义了黎曼度量 g 的微分流形 M 称为**黎曼流形**, 记为 (M, g).

现考虑 g 的局部坐标表示. 设 $(U, x_1, \cdots, x_m)$ 是 M 的一个局部坐标系, 令

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right), \quad i, j = 1, \cdots, m,$$

则 g_{ij} 是 U 上的光滑函数. 因 g 是对称的, 故 $g_{ij} = g_{ji}$. 由线性代数知, g 是正定的当且仅当矩阵 $A = (g_{ij})$ 是正定的. 因此, 黎曼度量 g 在 U 上可以表示为

$$g_U = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} \mathrm{d}x_i \otimes \mathrm{d}x_j, \quad (g_{ij})\text{为对称正定矩阵}.$$

对于 M 上的光滑向量场 X 与 Y, 它们在 U 上分别表示为 $X = \sum\limits_{l=1}^{m} X_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}, X_i = X(x_i)$ 与 $Y = \sum\limits_{j=1}^{m} Y_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}, Y_j = Y(x_j)$. 简记 $X = (X_1, \cdots, X_m), Y = (Y_1, \cdots, Y_m)$, 那么

$$g(X, Y) = < X, Y > = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} X_i Y_j = X A Y^{\mathrm{T}}.$$

定理 2.5.3 在 m 维光滑流形 M 上必有黎曼度量.

证明 由定理 1.2.1 知, 存在一个 M 上的坐标邻域的局部有限的开覆盖 $\{(U_\alpha, x_i^\alpha)|\, \alpha \in \Gamma\}$ 以及从属于它的单位分解 $\{\eta_\alpha|\, \alpha \in \Gamma\}$. 在每个 U_α 上定义一个黎曼度量 $<,>_{U_\alpha}$ 为

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_j^\alpha} \right\rangle_{U_\alpha} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, m\,.$$

而由

$$(\eta_\alpha \cdot <,>_{U_\alpha})(p) = \begin{cases} \eta_\alpha(p) <,>_{U_\alpha}, & p \in U_\alpha, \\ 0, & p \in M - U_\alpha \end{cases}$$

定义的 $\eta_\alpha \cdot <,>_{U_\alpha}$ 是 M 上光滑的 2 阶对称协变张量场. 再令

$$g =<,>= \sum_{\alpha\in\Gamma} \eta_\alpha \cdot <,>_{U_\alpha}\,.$$

由于覆盖 $\{\, U_\alpha|\, \alpha \in \Gamma\}$ 的局部有限性, 上式右端在任意点 $p \in M$ 的某一邻域内只是有限多个项之和, 因此 g 是定义在 M 上的一个光滑的 2 阶对称协变张量场, g 还是正定的留给读者验证. 这样 g 便是 M 上的一个黎曼度量.

2.6 李 (Lie) 导 数

张量场和微分形式可以对于一个给定的向量场进行微分运算, 所得到的导数称为李导数.

定义 2.6.1 在流形 M 上取定一个光滑向量场 X, 由定理 2.2.2 知, 将 X 生成的局部单参数变换群记为 $\{h_t\}$. 令 Y 是 M 上的另一个光滑向量场, 我们定义 Y 在点 $p \in M$ 处关于 X 的导数如下：首先沿着 X 的过点 p 的积分曲线移到点 $q = h_t(p)$, Y 在点 q 的值 Y_q 经 $\mathrm{d}h_t^{-1}$ 拉回到 T_pM, 于是 $\mathrm{d}h_{-t}(Y_{h_t(p)})$ 是切空间 T_pM 中的一条曲线. 考虑该曲线在 $t = 0$ 处的切向量, 即考虑取值于 T_pM 中的光滑向量值函数 $t \mapsto \mathrm{d}h_{-t}(Y_{h_t(p)})$, 并且取它在 $t = 0$ 处的导数, 称为 Y 在点 p 关于 X 的**李导数**, 记为 $(L_XY)_p$, 于是有

$$(L_XY)_p = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{d}h_{-t}(Y_{h_t(p)}) - Y_p}{t} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\mathrm{d}h_{-t}(Y_{h_t(p)})). \tag{1}$$

它是光滑向量场 Y 沿 X 的流线的变化率 (见图 2.4). 读者不难看出, $(L_XY)_p$ 还可以表示为

$$(L_XY)_p = \lim_{t\to 0} \frac{Y_p - \mathrm{d}h_t(Y_{h_{-t}(p)})}{t}. \tag{2}$$

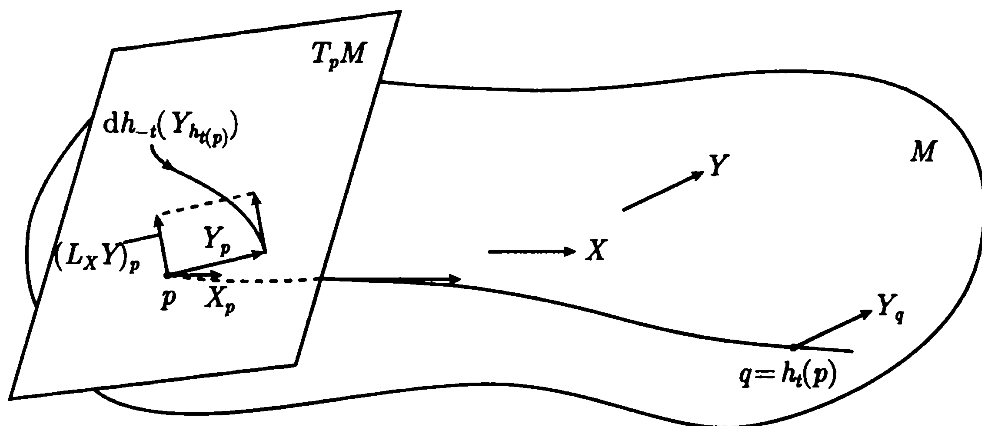


图 2.4

定理 2.6.1　设 X, Y 是 C^∞ 流形 M 上的任意两个光滑向量场, 则

$$L_XY=[X,Y].$$

证明　任取点 $p\in M$, 需证 $(L_XY)_p=[X,Y]_p$. 设 f 为定义在点 p 附近的光滑函数, 记 X 生成的局部单参数变换群为 $\{h_t\}$, 令 $F(t,p)=f(h_t(p))$. 因

$$F(t,p)-F(0,p)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}F(st,p)}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=t\cdot\int_0^1\left.\frac{\mathrm{d}F(u,p)}{\mathrm{d}u}\right|_{u=st}\mathrm{d}s,$$

故 $f(h_t(p))=f(p)+tg_t(p)$, 其中 $g_t(p)=\displaystyle\int_0^1\left.\frac{\mathrm{d}f(h_u(p))}{\mathrm{d}u}\right|_{u=st}\mathrm{d}s$, 并且 $g_0(p)=\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(h_t(p))\right|_{t=0}=X_pf$.

$$\begin{aligned}(L_XY)_p(f)&=\lim_{t\to0}\left(\frac{Y_p-\mathrm{d}h_t(Y_{h_{-t}(p)})}{t}\right)f=\lim_{t\to0}\frac{Y_pf-Y_{h_{-t}(p)}(f\circ h_t)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{Y_pf-Y_{h_{-t}(p)}f}{t}-\lim_{t\to0}Y_{h_{-t}(p)}(g_t)\\&=X_p(Yf)-Y_pg_0=X_p(Yf)-Y_p(Xf)=[X,Y]_pf,\end{aligned}$$

于是

$$(L_XY)_p=[X,Y]_p.$$

可以用类似的方法定义一个微分形式 ω 关于向量场 X 的李导数. 注意在这种情况下, ω 在点 $h_t(p)$ 取值 $\omega_{h_t(p)}$, 经 h_t^* 拉回到 $\Lambda(T_p^*M)$, 因而定义

$$(L_X\omega)_p=\lim_{t\to0}\frac{h_t^*(\omega_{h_t(p)})-\omega_p}{t}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}h_t^*(\omega_{h_t(p)}).\tag{3}$$

若 ω 是 M 上的光滑 k 次外微分式, 则 $L_X\omega$ 仍为 k 次外微分式, 因而 $L_X: A^k(M) \to A^k(M)$. 不难验证, 对于 M 上任意 k 个光滑向量场 $Y_1,\cdots,Y_k$, 有

$$(L_X\omega)(Y_1,\cdots,Y_k) = L_X(\omega(Y_1,\cdots,Y_k)) - \sum_{j=1}^{k}\omega(Y_1,\cdots,Y_{j-1},L_XY_j,Y_{j+1},\cdots,Y_k).$$

命题 2.6.1 设 X 是 M 上的 C^∞ 向量场, 则李导数 $L_X: A(M)\to A(M)$ 是一个求导算子.

证明 L_X 显然是线性的. 下面证明

$$L_X(\omega\wedge\omega') = L_X\omega\wedge\omega' + \omega\wedge L_X\omega', \quad \omega,\omega'\in A(M).$$

设 $\{h_t\}$ 是由 X 生成的局部单参数变换群, 则

$$\begin{aligned}
L_X(\omega\wedge\omega') &= \lim_{t\to 0}\frac{h_t^*(\omega\wedge\omega')-\omega\wedge\omega'}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{h_t^*\omega\wedge h_t^*\omega' - h_t^*\omega\wedge\omega'}{t} + \lim_{t\to 0}\frac{h_t^*\omega\wedge\omega'-\omega\wedge\omega'}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}h_t^*\omega\wedge\left(\lim_{t\to 0}\frac{h_t^*\omega'-\omega'}{t}\right) + \left(\lim_{t\to 0}\frac{h_t^*\omega-\omega}{t}\right)\wedge\omega'\\
&= \omega\wedge L_X\omega' + L_X\omega\wedge\omega'.
\end{aligned}$$

我们将向量空间中的内乘运算引入到流形中来. 设 X 是 m 维流形 M 上的 C^∞ 向量场, 对 $1\leqslant k\leqslant m$, 映射

$$i(X): A^k(M)\to A^{k-1}(M)$$

定义为: 对于 $\omega\in A^k(M)$, $(i(X)\cdot\omega)(p) = i(X(p))\omega(p)$, $\forall p\in M$. 等价地, 令 $i(X)\omega(Y_1,\cdots,Y_{k-1}) = \omega(X,Y_1,\cdots,Y_{k-1})$, 其中 $Y_1,\cdots,Y_{k-1}$ 是 M 上任意 $k-1$ 个 C^∞ 向量场.

约定: $i(X)$ 在 $A^0(M)=C^\infty(M)$ 上的作用为零映射.

命题 2.6.2 假设 X 是 M 上的光滑向量场, 那么在 $A(M)$ 上,

(i) $L_X\circ \mathrm{d} = \mathrm{d}\circ L_X$,

(ii) $L_X = i(X)\circ\mathrm{d} + \mathrm{d}\circ i(X)$.

证明 仅证 (ii). 首先由 2.4.3 中 (7) 式以及定理 2.5.1(iii) 可推出

$$\begin{aligned}
&(i(X)\circ\mathrm{d}+\mathrm{d}\circ i(X))(\omega\wedge\tau)\\
&=(i(X)\circ\mathrm{d}+\mathrm{d}\circ i(X))\omega\wedge\tau + \omega\wedge(i(X)\circ\mathrm{d}+\mathrm{d}\circ i(X))\tau,
\end{aligned}$$

因而 $i(X)\circ\mathrm{d}+\mathrm{d}\circ i(X)$ 也是 $A(M)$ 中的一个求导算子, 并且它与 d 可交换, 这是因为 $\mathrm{d}\circ\mathrm{d}=0$ 之缘故.

任取 $f \in C^\infty(M)$, 则 $(i(X)\circ \mathrm{d} + \mathrm{d}\circ i(X))f = i(X)(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}f(X) = Xf$. 又 $(L_X f)_p = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(h_t(p)) - f(p)}{t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(h_t(p)))\Big|_{t=0} = X_p f$, 故 $L_X f = Xf$. 这说明 L_X与$(i(X)\circ \mathrm{d} + \mathrm{d}\circ i(X))$ 在函数上的作用相同, 因而 (ii) 式可以从局部坐标系中的计算而得出, 细节请读者补述.

2.7　de Rham 上同调群

本节将引进 de Rham 上同调群, 证明 Poincaré 引理, 陈述 de Rham 同构定理, 其证明放在第 5 章. 此外给出了计算 de Rham 群的实例.

定义 2.7.1　设 M 是光滑流形, M 上的一个光滑 k 次微分形式 ω 是闭的, 如果 $\mathrm{d}\omega = 0$. 称形式 ω 是**恰当的**, 如果有另一个光滑形式 $\tau \in A^{k-1}(M)$ 使得 $\omega = \mathrm{d}\tau$.

设 $Z_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R})$ 表示 M 上闭 k- 形式所成的向量空间, $B_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R})$ 表示 M 上恰当 k- 形式所成的向量空间, 即

$$Z_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R}) = \left\{\, \omega \in A^k(M) \middle|\, \mathrm{d}\omega = 0 \right\},$$

$$B_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R}) = \left\{\omega \in A^k(M) \middle|\, 存在\tau \in A^{k-1}(M), 使得\omega = \mathrm{d}\tau \right\}.$$

因而 $Z_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R})$ 是同态 $\mathrm{d}: A^k(M) \to A^{k+1}(M)$ 的核 , $B_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R})$ 是同态 $\mathrm{d}: A^{k-1}(M) \to A^k(M)$ 的像. 由于 $\mathrm{d}^2 = 0$, 所以 $B_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R}) \subset Z_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R})$. 商空间

$$H_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R}) = Z_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R})/B_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R})$$

称为流形 M 的第 k 个**de Rham 上同调群**. 当 M 为紧致流形时, 其维数为有限数. 记 $\dim H_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R}) = b_k$, 称为 M 的第 k 个**Betti 数**.

如果 M 的第 k 个 Betti 数是零, 则 M 的任意闭 k- 形式都是恰当的. 然而一个闭形式未必是恰当的. 经典的反例是 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 上的光滑 1- 形式

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y.$$

显然

$$\mathrm{d}\omega = -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x + \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = 0,$$

故 ω 是光滑闭形式, 但它不是恰当形式. 若不然, $\omega = \mathrm{d}\eta, \eta \in C^\infty(\mathbb{R}^2 - \{0\})$, 则

$$\int_{S^1}\omega = \int_{S^1}\mathrm{d}\eta = \int_0^{2\pi}\eta'(\theta)\mathrm{d}\theta = \eta(2\pi) - \eta(0) = 0,$$

这与

$$\begin{aligned}\int_{S^1}\omega&=\int_{S^1}-\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\left[\frac{-\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}(-\sin\theta)+\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\cos\theta\right]\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi\end{aligned}$$

相矛盾, 其中积分是沿单位圆周逆时针方向.

命题 2.7.1 设 M 是 m 维 C^∞ 连通流形, 则

$$H_{\mathrm{d}}^0(M,\mathbb{R})\cong\mathbb{R}.$$

证明 因 $B_{\mathrm{d}}^0(M,\mathbb{R})=\{0\}$, 故

$$H_{\mathrm{d}}^0(M,\mathbb{R})=Z_{\mathrm{d}}^0(M,\mathbb{R})=\{f\in C^\infty(M)|\,\mathrm{d}f=0\}.$$

任取点 $p\in M$, 存在围绕点 p 的局部坐标系 $(U,\varphi;x_1,\cdots,x_m)$, 使得 U 是连通的. 由

$$0=\mathrm{d}f\,|_U=\sum_{i=1}^m\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$$

得到 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=\dfrac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r_i}=0,\ i=1,\cdots,m$, 这说明 $f\circ\varphi^{-1}$ 在连通开集 $\varphi(U)$ 上取常值, 因而 $f|_U$ 为常值. 选取 $p_0\in M$, 令

$$M_1=\{p\in M|\,f(p)=f(p_0)\},M_2=\{p\in M|\,f(p)\neq f(p_0)\},$$

两者都是 M 的开集且互不相交, $M_1\cup M_2=M$. 由于 M 连通, 且 $p_0\in M_1$, 故 $M_2=\varnothing$, $M=M_1$, 说明 f 是 M 上的常值函数, 于是

$$H_{\mathrm{d}}^0(M,\mathbb{R})=\{f:M\to\mathbb{R}\text{为常值函数}\}\cong\mathbb{R}.$$

定理 2.7.1(Poincaré引理) 设 $M\subset\mathbb{R}^m$ 为包含点 $0\in\mathbb{R}^m$ 的星形状开集 (因而对任意点 $p\in M$, 连接点 0 与 p 的直线段位于 M 中), 则

$$H_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R})\cong\begin{cases}\mathbb{R}, & k=0,\\0, & 0<k\leqslant m.\end{cases}$$

证明 星形状开集 M 是道路连通的, 当然它也是连通的. 据命题 2.7.1, $H_{\mathrm{d}}^0(M,\mathbb{R})\cong\mathbb{R}$.

当 $0 < k \leqslant m$ 时, 欲证 $H_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R}) = 0$, 只需证 $Z_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R}) = B_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R})$. 而 $B_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R}) \subset Z_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R})$, 因此证 $Z_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R}) \subset B_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R})$ 即可. 为此, 对 $1 \leqslant k \leqslant m$, 构作一个线性映射 $h_k : A^k(M) \to A^{k-1}(M)$, 使得

$$h_{k+1} \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ h_k = id. \tag{1}$$

这样一来, 如果 $\omega \in A^k(M)$ 使得 $\mathrm{d}\omega = 0$, 那么由上式得

$$\omega = h_{k+1}(\mathrm{d}(\omega)) + \mathrm{d}(h_k(\omega)) = \mathrm{d}(h_k(\omega)),$$

因而 $Z_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R}) \subset B_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R})$ 得证. 下面就来构作 $\{h_k\}$.

利用命题 2.6.2 中公式 (ii),

$$L_X = i(X) \circ \mathrm{d} + \mathrm{d} \circ i(X), \tag{2}$$

这里 $X = \sum_{i=1}^m r_i \dfrac{\partial}{\partial r_i}$ 为 M 上的径向向量场. 定义线性算子 $\alpha_k : A^k(M) \to A^k(M)$ 如下：首先令

$$\alpha_k(f\mathrm{d}r_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r_{i_k})(p) = \left(\int_0^1 t^{k-1} f(tp)\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}r_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r_{i_k}(p),$$

然后线性扩张到整个 $A^k(M)$ 上.

由于李导数 L_X 与外微分 d 可换, 我们可得到

$$\begin{aligned}
&\alpha_k \circ L_X(f\mathrm{d}r_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r_{i_k})(p)\\
&= \alpha_k \left(\left(kf + \sum r_i \frac{\partial f}{\partial r_i}\right) \mathrm{d}r_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r_{i_k}\right)(p)\\
&= \left(\int_0^1 t^{k-1} \left(kf(tp) + \sum r_i(tp) \left.\frac{\partial f}{\partial r_i}\right|_{tp}\right) \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}r_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r_{i_k}(p)\\
&= \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^k f(tp))\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}r_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r_{i_k}\\
&= f(p)\mathrm{d}r_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r_{i_k},
\end{aligned}$$

于是在 $A^k(M)$ 上, 有 $\alpha_k \circ L_X = id$. 再结合 (2) 式, 便得到在 $A^k(M)$ 上, 有

$$id = \alpha_k \circ i(X) \circ \mathrm{d} + \alpha_k \circ \mathrm{d} \circ i(X). \tag{3}$$

下面说明 $\alpha_{k+1}\circ \mathrm{d}=\mathrm{d}\circ\alpha_k$, 这是因为

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{k+1}\circ \mathrm{d}(f\mathrm{d}r_{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}r_{i_k})(p)\\
&=\alpha_{k+1}\left(\sum\frac{\partial f}{\partial r_i}\mathrm{d}r_i\wedge \mathrm{d}r_{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}r_{i_k}\right)(p)\\
&=\left(\int_0^1 t^k\sum\left.\frac{\partial f}{\partial r_i}\right|_{tp}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}r_i\wedge \mathrm{d}r_{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}r_{i_k}(p)\\
&=\mathrm{d}\left(\int_0^1 t^{k-1}f(tp)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}r_{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}r_{i_k}(p)\\
&=\mathrm{d}\circ\alpha_k(f\mathrm{d}r_{i_1}\wedge\cdots\wedge \mathrm{d}i_{r_k})(p).
\end{aligned}
$$

于是 (3) 式变为

$$id=\alpha_k\circ i(X)\circ \mathrm{d}+\mathrm{d}\circ\alpha_{k-1}\circ i(X). \tag{4}$$

令

$$h_k=\alpha_{k-1}\circ i\left(\sum_{j=1}^m r_j\frac{\partial}{\partial r_j}\right),$$

得到的线性变换 $h_k: A^k(M)\to A^{k-1}(M)$ 恰好满足 (1) 式. 根据前面的分析, 本定理得证.

例 1 讨论单位圆周 S^1 的 de Rham 群. 因为对于 $k>1$, 在 S^1 上无非零的 $k-$形式, 因此除 $k=0,1$ 之外, 所有上同调群 $H_{\mathrm{d}}^k(S^1,\mathbb{R})$ 全部为零. 因 S^1 连通, 据命题 2.7.1,

$$H_{\mathrm{d}}^0(S^1,\mathbb{R})\cong\mathbb{R}.$$

下面计算 $H_{\mathrm{d}}^1(S^1,\mathbb{R})$. 如果用 θ 表示 S^1 上点的极坐标的极角, 那么允许相差 2π 的整数倍. 然而它的微分 $\mathrm{d}\theta$ 却是 S^1 上处处非零的光滑 1- 形式, 但是它不是恰当的. 若不然, 它在 S^1 上的积分应当为 0 而不是 2π.

断言: 若 ω 是 S^1 的光滑 1- 形式, 则存在常数 c, 使得 $\omega-c\mathrm{d}\theta$ 是恰当的.

现设 $\omega=f(\theta)\mathrm{d}\theta, c=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{S^1}\omega$, 并假定 $g(\theta)=\displaystyle\int_0^\theta(f(\theta)-c)\mathrm{d}\theta$. 因为对每一个整数 n, $g(\theta+2\pi n)=g(\theta)$. 所以 g 是 S^1 上的一个完全确定的 C^∞ 函数, 并且 $\mathrm{d}g=(f(\theta)-c)\mathrm{d}\theta=\omega-c\mathrm{d}\theta$, 这说明 S^1 上的任意光滑 1 - 形式与 $\mathrm{d}\theta$ 的某个实数倍 (即常数 c) 相差一个恰当形式, 所以 $H_{\mathrm{d}}^1(S^1,\mathbb{R})\cong\mathbb{R}$.

问: 如果两个光滑流形微分同胚, 那么它们的 de Rham 上同调群有何关系呢? 设 M,N 为 C^∞ 流形, $F:M\to N$ 为 C^∞ 映射, 如 2.5 节中所述, 它诱导出外微分形式空间之间的线性映射 $F^*:A^k(N)\to A^k(M)$. 据定理 2.5.2, 我们有

$$F^*:Z_{\mathrm{d}}^k(N,\mathbb{R})\to Z_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R})\text{ 及 }\quad F^*:B_{\mathrm{d}}^k(N,\mathbb{R})\to B_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R}).$$

事实上, 若 $\omega \in Z_{\mathrm{d}}^k(N,\mathbb{R})$, 则 $\mathrm{d}(F^*\omega) = F^*(\mathrm{d}\omega) = 0$, 故 $F^*\omega \in Z_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R})$. 若 $\omega \in B_{\mathrm{d}}^k(N,\mathbb{R})$, 则存在 $\tau \in A^{k-1}(N)$, 使得 $\mathrm{d}\tau = \omega$, 因而 $F^*\omega = F^*(\mathrm{d}\tau) = \mathrm{d}(F^*\tau)$, 故 $F^*\omega \in B_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R})$. 因此, F^* 诱导出 de Rham 上同调群之间的一个线性映射

$$\widetilde{F} : Z_{\mathrm{d}}^k(N,\mathbb{R})/B^k(N,\mathbb{R}) \to Z_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R})/B_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R}),$$

即

$$\widetilde{F} : H_{\mathrm{d}}^k(N,\mathbb{R}) \to H_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R}).$$

如果 $F : M \to N$ 及 $G : N \to L$ 都是 C^∞ 映射, 容易验证 $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$, 因此 $\widetilde{G \circ F} = \widetilde{F} \circ \widetilde{G}$, 即由下面的左交换图表推得右交换图表

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{F} & N \\ & \searrow^{G\circ F} & \downarrow G \\ & & L \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R}) & \xleftarrow{\widetilde{F}} & H_{\mathrm{d}}^k(N,\mathbb{R}) \\ & \nwarrow^{\widetilde{G\circ F}} & \uparrow \widetilde{G} \\ & & H_{\mathrm{d}}^k(L,\mathbb{R}) \end{array}$$

又若 $id_M : M \to M$ 为恒同映射, 则 $\widetilde{id_M} : H_k^{\mathrm{d}}(M,\mathbb{R}) \to H_k^{\mathrm{d}}(M,\mathbb{R})$ 为恒同同态. 由此可得到

定理 2.7.2　设 M, N 为光滑流形, $F : M \to N$ 是 C^∞ 微分同胚, 则对每一 $k \geqslant 0$, 由 F 所诱导的同态 $\widetilde{F} : H_{\mathrm{d}}^k(N,\mathbb{R}) \to H_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R})$ 是同构.

这说明流形的 de Rham 上同调群是微分同胚意义下的不变量. 需指出的是, 虽然这些上同调群是由流形的微分结构所决定的, 但它们还是拓扑不变量, 即如果两个光滑流形拓扑同胚 (而不必微分同胚), 那么它们有同构的 de Rham 上同调群, 这正是深刻的 de Rham 定理所揭示的. 第 5 章对下列形式的 de Rham 定理给出了初等的详细证明.

定理 2.7.3(de Rham 定理)　若 M 是一个光滑的可单纯剖分流形, 则对每个 $k : 0 \leqslant k \leqslant \dim M$,

$$H_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R}) \cong H^k(M,\mathbb{R}),$$

上式右边是由 M 的拓扑所决定的实单纯上同调群.

除考虑拓扑不变性外, de Rham 上同调群还具有同伦不变性, 即

定理 2.7.4　若光滑流形 M 和 N 在连续的意义下有相同的伦型, 则它们有同构的 de Rham 上同调群, 即

$$H_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R}) \cong H_{\mathrm{d}}^k(N,\mathbb{R}).$$

证明可参看文献 [14].

例 2 设 $M=\mathbb{R}^2-\{0\}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的开子流形, 可参照例 1 那样计算 M 的 de Rham 上同调群, 但更简便的办法是利用 M 与单位圆周 S^1 是同伦等价这一事实, 立即得到

$$H_{\mathrm{d}}^k(M,\mathbb{R})\cong H_{\mathrm{d}}^k(S^1,\mathbb{R})\cong\begin{cases}\mathbb{R}, & k=0,1,\\ 0, & k\neq 0,1.\end{cases}$$

习 题 2

1. n 维实射影空间 RP^n 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中所有 1 维线性子空间所构成的 n 维光滑流形, 因此任意一点 $[x]\in RP^n$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 1 维线性子空间. 令 $E=\bigcup\limits_{[x]\in RP^n}[x]$, 映射 $\pi:E\to RP^n$ 使得对于任意的 $v\in[x]$ 有 $\pi(v)=[x]$, 试给出 E 的光滑结构, 使得 $\pi:E\to RP^n$ 成为在实射影空间 RP^n 上秩为 1 的向量丛, 并求该向量丛的过渡函数.

2. 验证定义 2.1.1 和定义 2.1.2 是等价的.

3. 证明 $\mathbb{R}^{2n}$ 上的向量场

$$Y=x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots+x_{2n}\frac{\partial}{\partial x_{2n-1}}-x_{2n-1}\frac{\partial}{\partial x_{2n}}$$

在 S^{2n-1} 上的限制确定了 S^{2n-1} 上一个非零的向量场.

4. 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 取 p 点 $(p\neq(0,0))$ 的局部坐标系 (r,θ)(极坐标), 作出局部 C^∞ 向量场 $\dfrac{\partial}{\partial r}$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ 的示意图, 说明 $\dfrac{\partial}{\partial r}$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ 是 $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ 的 C^∞ 向量场的理由, 并将它们表示为 $\dfrac{\partial}{\partial x_1},\dfrac{\partial}{\partial x_2}$(其中 $x_1=r\cos\theta, x_2=r\sin\theta$) 的线性组合. 试对 $\mathbb{R}^3$ 中点 $p\neq(0,0,z)$ 的局部坐标 (r,θ,z)(柱面坐标) 作同样的工作.

5. 设 M 是微分流形, $p\in M, v\in T_pM$ 是任一向量, 证明: 存在 M 上的光滑向量场 X, 使得 $X_p=v$.

6. 设在 $\mathbb{R}^3$ 中给定 3 个光滑切向量场

$$X=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}, Y=z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z},\quad Z=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}.$$

求 $[X,Y]$, $[Y,Z]$ 和 $[Z,X]$.

7. 设 M,N 为光滑流形, $F:M\to N$ 为嵌入且 $F(M)$ 是 N 的闭子集. 证明: 对于 M 上的任意 C^∞ 向量场 X, 必存在 N 上的向量场 Y, 使得 X 和 Y 是 F- 相关的.

8. 设 $F:M\to N$ 是光滑映射, X 是流形 M 上的向量场. 假定当 $F(p)=F(q)$ 时, 有 $(\mathrm{d}F)_p(X(p))=(\mathrm{d}F)_q(X(q))$, 问在流形 N 上是否存在光滑向量场 Y, 使得 X 和 Y 是 F- 相关的? 试说明理由.

9. 设 (θ,φ) 为环面 $S^1\times S^1$ 的局部坐标系, 证明 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial\theta},\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right\}$ 是 $S^1\times S^1$ 上的 C^∞ 向量场, 并指出这两个向量场的积分曲线.

10. 设 $f:M\to N$ 是光滑映射, 假定 $X\in C^\infty(M,T(M)), Y\in C^\infty(N,T(N))$, 且 X 与 Y 是 f- 相关的. 证明: 若 $\gamma(t)$ 是 X 的积分曲线, 则 $f\circ\gamma(t)$ 是 Y 的积分曲线.

11. 求证: 若微分流形 M 上存在局部流 $\varphi: I_\varepsilon \times M \to M$, 这里 $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)(\varepsilon > 0)$, 则 φ 可扩充成 M 上的整体流.

12. 设 $\varphi: \mathbb{R} \times M \to M$ 是微分流形 M 上的 1- 参数微分同胚群, 问: 是否存在 M 上的光滑向量场 X, 使得 X 产生的 M 上的微分同胚群即为 φ?

13. 求出 $\mathbb{R}^2$ 中由下列向量场产生的 1- 参数微分同胚群:

1) $X = 0$;　　2) $X = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(i = 1, 2)$;

3) $X = y\dfrac{\partial}{\partial x} \pm x\dfrac{\partial}{\partial y}$;　　4) $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$.

14. 设 U 为流形 M 的开集, 则 U 上的分布 $\mathfrak{D}$ 是对合的充要条件是它的任一局部基 $\{X_1, \ldots, X_k\}$ 的每一个括号积有下列线性组合关系: $[X_i, X_j] = \sum\limits_{\alpha=1}^{k} c_{ij}^\alpha X_\alpha$, 其中 c_{ij}^α 是 U 上的 C^∞ 函数.

15. 设 $X_1 = z\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial z}, X_2 = -z\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial z}, X_3 = y\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial y}$, 证明 $\{X_1, X_2, X_3\}$ 确定了 $\mathbb{R}^3$ 上的一个 2- 维分布, 且是对合的.

16. 设 $X_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}, X_2 = \dfrac{\partial}{\partial y} + x\dfrac{\partial}{\partial z}$, 证明: $\{X_1, X_2\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的一个 2- 维分布, 但不是对合的.

17. 设 φ 是微分流形 M 上的 2 阶协变张量场, 证明 φ 是光滑的当且仅当对于 M 上的任意光滑向量场 $X, Y, \varphi(X, Y)$ 是 M 上的光滑函数.

18. 设 (P, φ) 是流形 M 上的对合分布 $\mathfrak{D}$ 的积分流形, $\psi: N \to M$ 是 C^∞ 映射, 满足 $\psi(N) \subset \varphi(P)$. 证明存在从 N 到 P 的唯一一个映射 ψ_0 使得 $\varphi \circ \psi_0 = \psi$, 并且 ψ_0是C^∞ 的.

19. 证明定理 2.3.3.

20. 考虑带有标准投影 $\pi_1: M \times N \to M$ 和 $\pi_2: M \times N \to N$ 的积流形 $M \times N$.

1) 证明 $\alpha: \widetilde{M} \to M \times N$是$C^\infty$ 的当且仅当 $\pi_1 \circ \alpha$和$\pi_2 \circ \alpha$是C^∞ 的.

2) 证明映射 $v \mapsto (\mathrm{d}\pi_1(v), \mathrm{d}\pi_2(v))$是$T_{(m,n)}(M \times N)$与$T_m M \oplus T_n N$ 的一个同构.

3) 设 X 和 Y 分别是 M 和 N 上的 C^∞ 向量场, 那么由 (b), X 和 Y 规范地决定 $M \times N$ 上的向量场 $\widetilde{X} = (X, 0)$和$\widetilde{Y} = (0, Y)$证明$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = 0$.

4) 设 $(m_0, n_0) \in M \times N$, 并且通过令 $i_{n_0}(m) = (m, n_0), i_{m_0}(n) = (m_0, n)$ 定义内射 $i_{n_0}: M \to M \times N$和$i_{m_0}: N \to M \times N$. 令 $v \in T_{(m_0,n_0)}(M \times N), v_1 = \mathrm{d}\pi_1(v) \in T_{m_0}M, v_2 = \mathrm{d}\pi_2(v) \in T_{n_0}N, f \in C^\infty(M \times N)$. 证明 $v(f) = v_1(f \circ i_{n_0}) + v_2(f \circ i_{m_0})$.

21. 证明实向量空间 V 中的向量 $v_1, \cdots, v_k$ 线性相关的充要条件是 $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = 0$.

22. 设 $v_1, \cdots, v_k$和$w_1, \cdots, w_k$ 是向量空间 V 中的两组向量, 满足 $\sum\limits_{i=1}^{k} v_i \wedge w_i = 0$. 如果 $v_1, \cdots, v_k$ 线性无关, 那么 w_i 可表成它们的线性组合 $w_i = \sum\limits_{j=1}^{k} a_{ij} v_j, 1 \leqslant i \leqslant k$.

23. 设 $v_i, w_i, v_i', w_i'(i = 1, \cdots, k)$ 是向量空间 V 中的两组向量. 若 $\{v_i, w_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$ 是线性无关的, 并且 $\sum\limits_{i=1}^{k} v_i \wedge w_i = \sum\limits_{i=1}^{k} v_i' \wedge w_i'$, 则 v_i', w_i' 均为 $v_1, \cdots, v_k, w_1, \cdots, w_k$ 的线性组合, 而且它们是线性无关的.

24. 设 $\omega = xy\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y - yz\mathrm{d}z, \eta = x\mathrm{d}x - yz^2\mathrm{d}y - 2x\mathrm{d}z$, 求:

1) $\mathrm{d}\omega$;

2) $\mathrm{d}\eta$;

3) $\mathrm{d}\omega \wedge \eta - \omega \wedge \mathrm{d}\eta$;

4) $f^*\omega$和$f^*(\mathrm{d}\omega)$,其中$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$定义为$f(u,v) = (uv, u^2, 3u+v)$.

25. 设 $U = \mathbb{R}^n - \{0\}$, 考虑 U 上的 $n-1$ 次外微分式 $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} f_i \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$, 其中 $f_i = x_i \Big/ \|x\|^m, \|x\|^m = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} {x_i}^2\right)^{\frac{m}{2}}$, m 为某一正数.

1) 求 $\mathrm{d}\omega$;

2) 确定 m 的值, 使得 $\mathrm{d}\omega = 0$. 并证明此时 ω 不是恰当微分式.

26. 设 $\varphi: S^1 \times \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^2$ 定义为 $\varphi(\theta, r) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, 由定义计算 $\varphi^*(\mathrm{d}x \wedge dy)$. 并证明它等于 $\mathrm{d}(\varphi^* x) \wedge \mathrm{d}(\varphi^* y)$.

27. 设 $\omega_1, \cdots, \omega_k$ 是 m 维光滑流形 M 上的光滑 1 次形式, 它们是逐点线性无关的, $k < m$. 假设 M 上的光滑 1- 形式 $\theta_1, \cdots, \theta_k$ 使得 $\sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i \wedge \omega_i = 0$, 证明在 M 上存在适合 $a_{ij} = a_{ji}$的C^∞ 函数 a_{ij} 使得 $\theta_i = \sum\limits_{j=1}^{k} a_{ij}\omega_j, \quad i = 1, \cdots, k$.

28. 设 ω 是光滑流形 M 上的光滑 k 次外微分式, $Y_0, Y_1, \cdots, Y_k$ 是 M 上的光滑向量场, 则:

1) $(L_{Y_0}\omega)(Y_1, \cdots, Y_k) = L_{Y_0}(\omega(Y_1, \cdots, Y_k)) - \sum\limits_{j=1}^{k} \omega(Y_1, \cdots, Y_{j-1}, L_{Y_0} Y_j, Y_{j+1}, \cdots, Y_k)$,

2)
$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(Y_0, Y_1, \cdots, Y_k) = &\sum_{i=0}^{k} (-1)^i Y_i \omega(Y_0, \cdots, \hat{Y}_i, \cdots, Y_k)\\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([Y_i, Y_j], Y_0, \cdots, \hat{Y}_i, \cdots, \hat{Y}_j, \cdots, Y_k).\end{aligned}$$

29. 设 M, N 为光滑流形, 且 M 连通, 又 $\pi: M \times N \to N$ 为自然投影. 证明 $\omega \in A^k(M \times N)$ 可表示为 $\omega = \pi^*(\alpha), \alpha \in A^k(N)$ 当且仅当 $i(X)\omega = 0$和$L_X\omega = 0$, 其中 X 是 $M \times N$ 上的任意向量场合于下列条件: $\mathrm{d}\pi(X(p,q)) = 0$ 对每一 $(p,q) \in M \times N$ 皆成立.

30. 设 $M = \mathbb{R}^3$, 指出下列形式哪些是闭的, 哪些是恰当的:

1) $\varphi = yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$;

2) $\varphi = x\mathrm{d}x + x^2y^2\mathrm{d}y + yz\mathrm{d}z$;

3) $\theta = xy^2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + z\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.

31. 证明:

1) 若 α, β 是闭微分形式, 则 $\alpha \wedge \beta$ 是闭微分形式;

2) 若 α 是闭微分形式, β 是恰当微分形式, 则 $\alpha \wedge \beta$ 是恰当微分形式.

32. 设 M 是 $2n$ 维光滑流形. M 上的 2 次微分式 ω 非退化是指: 对任意 $p \in M$ 及任意

$X \in T_pM, \omega(X,Y)=0$ 对任意 $Y \in T_pM$成立蕴含$X=0$. 若在光滑流形 M 上存在一个非退化的闭 2 次外微分式 ω, 则称 (M, ω) 为一个辛流形, ω 称为 M 上的辛结构. 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中设直角坐标系为 $(p_1, \cdots, p_n, q_1, \cdots, q_n)$. 令

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i$$

验证: $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ 是一个辛流形.

33. 设 (M, ω) 是辛流形, 对于任意的 $f \in C^{\infty}(M)$, 必有 M 上的光滑向量场 X_f, 使得对 M 上的任一向量场 Y, 有

$$\mathrm{d}f(Y) = \omega(X_f, Y),$$

这样的向量场 X_f 称为在辛流形 (M, ω) 上以 f 为势函数的 Hamilton 向量场. 用 $\gamma_x(t)$ 表示向量场 X_f 经过点 $x \in M$ 的流线, 证明:

1) $i(X_f)\omega = \mathrm{d}f$;

2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma_x(t)) = 0, \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times M$;

3) $L_{X_f}\omega = 0$.

第3章　李群初步

李群是一类重要的微分流形, 它除了是光滑流形外, 还是一个群, 并且群运算是光滑的, 因此它集几何、代数和分析于一体, 具有丰富的数学结构. 李群论在现代数学与物理的许多领域中有着广泛的应用, 成为了这些领域中不可或缺的部分.

李群论起源于挪威数学家 Marius Shophus Lie (1842-1899) 的连续群论, 它是李当时在研究求解微分方程时提出来的, 这里的群指的是连续变换群, 那么自然会问: 李群与连续群 (即拓扑群) 有什么关系呢? D. Hilbert(希尔伯特) 于 1900 年提出了 23 个著名问题, 其中第 5 个问题是: 一个拓扑群在什么条件下可以具有李群的结构? 它的意义是李群的定义条件是否可以削弱到连续? 这个问题于 1952 年由 Gleason, Montgomery 和 Zippin(见文献 [16]) 所解决, 他们证明: 如果 G 为拓扑流形, 且乘法运算与取逆运算都是连续的, 那么在 G 上存在解析结构, 使得乘法运算与取逆运算都是解析的, 因而 G 为李群. 正因为这样, 本章在李群是光滑流形这一假定下展开讨论.

本章介绍李群论的基础内容, 最重要的是阐述李群与其左不变光滑向量场构成的李代数之间的关系, 包括李子群与李子代数之间的对应, 李群的同态与其李代数的同态之间的对应关系. 3. 2 节讨论的指数映射是对由矩阵取幂组成的典型线性群的一种推广, 它建立了李群与其李代数之间的重要联系. 由于典型线性群是一类十分有用的李群, 在整个章节中都包含对它的讨论, 特别有一节介绍了李群的伴随表示. 本章最后一节讨论李群在微分流形上的作用, 即所谓李氏变换群, 介绍了齐性空间.

本章如标题所述是李群初步, 有三个重要定理或因需要深入细致的论证或因涉及论证工具只好割爱未直接给出证明. 相信读者在掌握本章内容后, 通过自学可进一步扩大知识面.

3.1　李群及其李代数

3.1.1　李群的定义及例

先看一个简单例子. 在光滑流形 $S^1=\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|\theta\in\mathbb{R}\}$(其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$) 上引进运算 $\cdot: S^1\times S^1\to S^1, (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2})\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$, 易见 $(S^1,\cdot)$ 是一个可换群. S^1 上的任意元素 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 的逆元 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{-1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, 并且映射 $\varphi: S^1\times S^1\to S^1, \varphi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2})=$

$e^{i\theta_1}\cdot(e^{i\theta_2})^{-1}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ 是 C^∞ 可微的. 这说明 S^1 既具有流形结构又具有群结构, 而且映射 φ 说明这两种结构满足相容性条件, 进而抽象出下列定义.

定义 3.1.1　李群是具有下列性质的非空集合 G:

(1) G 是一个群,

(2) G 是一个光滑流形,

(3) 群运算是光滑的, 即映射 $(\sigma,\tau)\mapsto\sigma\tau^{-1}$ 是从 $G\times G$ 到 G 的 C^∞ 映射.

将 G 作为光滑流形的维数定义为李群 G 的维数. 记李群 G 的单位元为 e.

易见李群的取逆运算 $G\to G$, $\sigma\mapsto\sigma^{-1}$ 是 C^∞ 映射, 因为它是下列两个 C^∞ 映射的复合:

$$G\to G\times G\to G,\quad \sigma\mapsto(e,\sigma)\ \ \mapsto e\sigma^{-1}=\sigma^{-1}.$$

同样, 李群的乘法运算 $G\times G\to G$, $(\sigma,\tau)\mapsto\sigma\cdot\tau$ 也是 C^∞ 的, 因为它是下列两个 C^∞ 映射的复合: $(\sigma,\tau)\mapsto(\sigma,\tau^{-1})\mapsto\sigma\cdot(\tau^{-1})^{-1}=\sigma\cdot\tau$. 由此不难看出定义 3.1.1 中的条件 (3) 等价于群 G 的乘法运算和取逆运算两者的光滑性.

定义 3.1.2　设 G 为李群. 对任意 $\sigma\in G$, 令

$$l_\sigma(\tau)=\sigma\tau,\quad r_\sigma(\tau)=\tau\sigma,\quad 对每一\tau\in G,$$

则 $l_\sigma, r_\sigma: G\to G$ 都是从 G 到它自身的 C^∞ 微分同胚, 分别称为 G 的**左平移和右平移**. 显然 $(l_\sigma)^{-1}=l_{\sigma^{-1}}$, $(r_\sigma)^{-1}=r_{\sigma^{-1}}$.

如果 V 是 G 的一个子集, 那么用 $V\sigma$ 和 σV 分别表示 $r_\sigma(V)$ 和 $l_\sigma(V)$. 又 $V^{-1}=\{v^{-1}|v\in V\}$, 并约定对 $V_1,V_2\subset G, V_1V_2=\{v_1v_2|v_1\in V_1,v_2\in V_2\}$.

例 1　$\mathbb{R}^n$ 关于向量的加法成为一个 n 维李群, 称为 n **维向量群或平移群**, 它是一个可交换李群.

例 2　$\mathbb{C}^*=\mathbb{C}-\{0\}$ 关于复数的乘法成为一个 2 维 (实) 李群. 事实上, $\mathbb{C}^*\cong\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的开子流形, 它是一个 2 维光滑流形.

设 $z_i=x_i+\mathrm{i}y_i\neq0, i=1,2$, 它们的积 $z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$, 用坐标表示为 $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1)$. 又对于 $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}^*$, $z^{-1}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-\mathrm{i}\dfrac{y}{x^2+y^2}$, 即 $(x,y)^{-1}=\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$, 故 $\mathbb{C}^*$ 上的乘法运算及取逆运算都是 C^∞ 的, 从而 $\mathbb{C}^*$ 是一个 2 维李群.

例 3　设 G, H 是李群. 在积流形 $G\times H$ 上定义乘法运算如下: 设 (σ_1,τ_1), $(\sigma_2,\tau_2)\in G\times H$, 令 $(\sigma_1,\tau_1)\cdot(\sigma_2,\tau_2)=(\sigma_1\sigma_2,\tau_1\tau_2)$, 因而 $(\sigma_1,\tau_1)^{-1}=(\sigma_1^{-1},\tau_1^{-1})$. 显然, 在 $G\times H$ 上的乘法运算与取逆运算都是光滑的, 因此 $G\times H$ 是一个李群, 称为 G 和 H 的**直积**, 并且 $G\times H$ 的维数 $\dim(G\times H)=\dim G+\dim H$.

特别, n 维环面 T^n(n 为正整数) 是李群, 它是李群 S^1 与其自身的 n 重直积, 即 $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\text{个}}$.

例 4 一般线性群.

由所有 $n \times n$ 非奇异实数矩阵组成的集 $GL(n,\mathbb{R})$ 是一个 n^2 维可微流形, $GL(n,\mathbb{R})$ 对于矩阵的乘法组成一个群, 该乘法运算显然是光滑的. 设 $A \in GL(n,\mathbb{R})$, 则 $\det A \neq 0$, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}A^*, A^*$ 是 A 的伴随矩阵, 因此逆矩阵 A^{-1} 的元素是矩阵 A 的元素的有理分式, 且分母不为零, 这表明群 $GL(n,\mathbb{R})$ 中的取逆运算也是光滑的, 故 $GL(n,\mathbb{R})$ 是一个 n^2 维李群, 称为 n 阶**实一般线性群**.

同样, 以复数为元素的 n 阶方阵可以看作是 $2n^2$ 维流形 $\mathbb{R}^{2n^2}$, 将其中非奇异方阵的全体记为 $GL(n,\mathbb{C})$. 与 $GL(n,\mathbb{R})$ 一样, $GL(n,\mathbb{C})$ 也是李群, 称为 n 阶**复一般线性群**.

例 5 设 V 是 n 维实向量空间, 令 $\mathrm{Aut}(V)$ 表示 V 上的非退化线性变换 (即 V 的自同构) 组成的集合, 它在复合运算下构成一个群. 在 V 中取定一个基底 $\delta_1, \cdots, \delta_n$, 则自同构 $\alpha \in \mathrm{Aut}(V)$ 对应着它在基底 $\{\delta_i\}$ 下的矩阵 $A \in GL(n,\mathbb{R})$, 而且这种对应是一一的, 因此将 $\mathrm{Aut}(V)$ 和 $GL(n,\mathbb{R})$ 作为抽象群看待时是同构的. 用这种同构对应可以在 $\mathrm{Aut}(V)$ 中引入流形结构, 使得 $\mathrm{Aut}(V)$ 成为一个李群.

同样, 如果 V 是 n 维复向量空间, 那么利用 $\mathrm{Aut}(V)$ 和 $GL(n,\mathbb{C})$ 的同构对应, 可以使 $\mathrm{Aut}(V)$ 成为一个李群.

例 6 令 $M = GL(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$, 在积流形 M 上引入乘法运算如下: 取 $A, A_1 \in GL(n,\mathbb{R}), v, v_1 \in \mathbb{R}^n$, 令 $(A,v)\cdot(A_1,v_1) = (AA_1, Av_1 + v)$. 不难看出 M 在这一乘法运算下组成一个群, 而且乘法运算是光滑的, 又 $(A,v)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}v)$, 因而取逆运算也是 C^∞ 的. 这说明 M 是一个李群, 称为 $\mathbb{R}^n$ 上的**仿射运动群**. 因为若将 M 的元素 (A,v) 与 $\mathbb{R}^n$ 的仿射运动 $x \mapsto Ax + v$ 等同, 则 M 中的乘法就是仿射运动的复合.

设 G 是李群. 若 G 作为拓扑空间是连通 (或紧致) 的, 则称 G 为**连通(或紧致)李群**. 例如 S^1, T^n 都是紧致连通李群, $\mathbb{C}^*$ 是连通李群但非紧致.

引理 3.1.1 设 H 是李群 G 的抽象子群. 若 H 包含 G 的一个非空开子集, 则 H 是 G 的既开且闭的子集.

证明 先证 H 是 G 的开子集. 设 $H \supset U$, 且 U 是 G 的非空开子集.

若 $\sigma \in U$, 则 $\sigma, \sigma^{-1} \in H$, $\sigma^{-1}U \subset H$ 并且 $\sigma^{-1}U = l_{\sigma^{-1}}(U)$ 是 G 中包含单位元 e 的开子集, 记 $\sigma^{-1}U = V$. 对于每一 $\tau \in H, \tau \in \tau V \subset H$ 且 τV 是 G 的开子集, 于是 $H = \bigcup_{\tau\in H} \tau V$ 为 G 中开集. 下面说明 H 是 G 中闭子集.

对每一 $\sigma \notin H$, 模 H 的左陪集 $\sigma H = l_\sigma(H)$ 在 G 中是开的, 并且 $\sigma H \cap H = \varnothing$

因而 $\sigma H \subset G - H$, 于是 $G - H = \bigcup_{\sigma \notin H} \sigma H$ 是 G 中开子集, H 为 G 中闭子集.

推论 3.1.1　连通李群 G 由任一单位邻域 U 生成, 即若 U 是单位元 e 的一个邻域, 则 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$.

证明　令 V 是 U 的一个包含 e 的开子集使得 $V = V^{-1}$(例如令 $V = U \cap U^{-1}$ 就使 $V = V^{-1}$ 成立), 并设 $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$, 易见 H 是 G 的一个抽象子群. 由引理 3.1.1 知, H 是 G 中既开且闭的非空子集. 因为 G 是连通的, 所以 H 必为 G, 于是有 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$.

3.1.2　李代数的概念

李群集几何、代数性质于一体, 把李群线性化, 即寻找一个有限维的线性空间来逼近它, 通过对这个特殊的线性空间的研究来反映李群的性质, 为此需要引入和李群相伴而生的李代数概念. 然而李代数概念可以脱离李群而单独存在, 例如 3 维欧氏向量空间 $\mathbb{R}^3$ 关于向量的叉积便构成一个李代数. 下面先给出李代数的定义.

定义 3.1.3　设 $\mathfrak{g}$ 是 n 维实 (或复) 向量空间. 若在 $\mathfrak{g}$ 中可以定义一个双线性算子 $[,]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, 称为换位运算或李括号积, 满足以下条件: 对于所有 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, 有

(1) 反交换性 $[X, Y] = -[Y, X]$,

(2) Jacobi 恒等式 $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$,

则称 $\mathfrak{g}$ 为 n **维实(或复)李代数**.

在李代数 $\mathfrak{g}$ 中取定一组基 $X_1, \cdots, X_n$. 由于 $[X_i, X_j] \in \mathfrak{g}$, 所以存在实 (或复) 数 c_{ij}^k ($k = 1, \cdots, n$), 使得

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k X_k, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

这 n^3 个数 $c_{ij}^k (i, j, k = 1, 2, \cdots, n)$ 叫做李代数 $\mathfrak{g}$ 的**结构常数**.

结构常数显然与基的选取有关, 在 $\mathfrak{g}$ 中取定一组基后, 李代数的条件 (1) 和 (2) 等价于结构常数所满足的下列条件:

$(1)'$反交换性$c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0, \quad i, j, k = 1, 2, \cdots, n,$

$(2)'$Jacobi 恒等式 $\sum_{s=1}^{n} (c_{ij}^s c_{sk}^t + c_{jk}^s c_{si}^t + c_{ki}^s c_{sj}^t) = 0, \quad i, j, k, t = 1, 2, \cdots, n.$

为方便起见, 作如下约定: 对李代数 $\mathfrak{g}$ 中任意二子集 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$, 用 $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2]$ 表示由形如 $[X, Y]$(其中 $X \in \mathfrak{g}_1, Y \in \mathfrak{g}_2$) 的元素线性组合所生成的线性子空间.

定义 3.1.4　设 $\mathfrak{g}_1$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个线性子空间.

(1) 如果 $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}_1$, 那么 $\mathfrak{g}_1$ 叫做 $\mathfrak{g}$ 的**子代数**. 显然 $\mathfrak{g}_1$ 是李代数.

(2) 如果 $[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{g}_1$, 那么 $\mathfrak{g}_1$ 叫做 $\mathfrak{g}$ 的**理想**.

例 7 设 V 是一个向量空间. 如果对所有 $X,Y\in V$, 都有 $[X,Y]=0$, 则 V 是李代数, 这样的李代数称为**交换李代数**.

例 8 令 $gl(n,\mathbb{R})$ 为 $n\times n$ 实矩阵全体组成的 n^2 维向量空间. 对每一 $X,Y\in gl(n,\mathbb{R})$, 定义 $[X,Y]=XY-YX$, 容易验证 $[,]:gl(n,\mathbb{R})\times gl(n,\mathbb{R})\to gl(n,\mathbb{R})$ 是换位运算, 因此 $gl(n,\mathbb{R})$ 是一个 n^2 维实李代数.

用 $gl(n,\mathbb{C})$ 表 $n\times n$ 复矩阵全体组成的 n^2 维复向量空间, 换位运算如实情形定义那样, $gl(n,\mathbb{C})$ 组成一个 n^2 维复李代数.

例 9 令 V 是一个 n 维实向量空间, $\mathrm{End}(V)$ 表示 V 上的所有线性变换 (即 V 的自同态) 的集合, 它是一个 n^2 维实向量空间. 对每一 $l_1,l_2\in\mathrm{End}(V)$, 规定 $[l_1,l_2]=l_1\circ l_2-l_2\circ l_1$, 则 $\mathrm{End}(V)$ 成为一个李代数.

如果 V 是一个 n 维复向量空间, 换位运算如实情形定义那样, 则 $\mathrm{End}(V)$ 是一个 $2n^2$ 维实李代数.

例 10 流形 M 上的所有光滑向量场组成的实向量空间 $C^\infty(M,T(M))$ 在向量场的括号积 (见定义 2.2.2) 运算下形成一个李代数 (据命题 2.2.2).

例 11 设 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 是两个实 (或复) 李代数, 在两个向量空间 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 的直和 $\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$ 上引入换位运算

$$[(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)]=([X_1,X_2],[Y_1,Y_2]),\quad X_1,X_2\in\mathfrak{g}_1,Y_1,Y_2\in\mathfrak{g}_2$$

也可变成一个李代数, $\mathfrak{g}_1\oplus\mathfrak{g}_2$ 称为李代数的**直和**.

例 12 设 $\mathfrak{g}$ 是 $gl(3,\mathbb{R})$ 的子集, 它由 3×3 反称矩阵的全体组成, 则 $\mathfrak{g}$ 是 $gl(3,\mathbb{R})$ 的一个 3 维线性子空间, 且 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{g}$, 故 $\mathfrak{g}$ 是 $gl(3,\mathbb{R})$ 的子代数. 在 $\mathfrak{g}$ 内取三个线性无关矩阵:

$$X_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad X_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\quad X_3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

则 $\mathfrak{g}$ 内任一矩阵

$$X=\begin{pmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{pmatrix}=-aX_3+bX_2-cX_1,$$

因此 X_1,X_2,X_3 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的一组基. 直接计算可以得到

$$[X_1,X_2]=X_3,\quad [X_2,X_3]=X_1,\quad [X_3,X_1]=X_2,$$

因此在基 X_1, X_2, X_3 下, 结构常数非常简单, $c_{12}^3 = -c_{21}^3 = 1, c_{23}^1 = -c_{32}^1 = 1, c_{31}^2 = -c_{13}^2 = 1$, 其余均为 0.

3.1.3 左不变向量场

例 10 说流形上的光滑向量场全体关于括号积运算组成一个李代数. 一般来说, 这个李代数不是有限维的. 对于李群, 我们将考虑更能显示李群的重要线性结构的一类光滑向量场.

定义 3.1.5　设 G 是李群, X 是 G 上的一个向量场 (不必事先假定它是光滑的). 如果对每一 $\sigma \in G, X$ 与其自身是 l_σ- 相关的, 即

$$\mathrm{d}l_\sigma \circ X = X \circ l_\sigma,$$

其中 l_σ 表示 G 的左平移, 那么 X 叫做 G 上的**左不变向量场**.

类似地, 可以定义 G 上的**右不变向量场**.

命题 3.1.1　设 G 是李群. 将 G 上的所有左不变向量场的集合记为 $\mathfrak{g}$, 则

(i) $\mathfrak{g}$ 是一个实向量空间, 并且 $\mathfrak{g}$ 与 G 在单位元处的切空间 T_eG 是同构的, 因此 $\dim \mathfrak{g} = \dim T_eG = \dim G$;

(ii) 每一个左不变向量场都是光滑的;

(iii) 两个左不变向量场的括号积仍是左不变向量场.

于是在向量场的括号积运算下, $\mathfrak{g}$ 构成一个李代数.

证明　(i) 若 X , Y 是 G 上的左不变向量场, 易见 $X+Y, \lambda X (\lambda \in \mathbb{R})$ 也是 G 上的左不变向量场, 因而 $\mathfrak{g}$ 是一个实向量空间 (细节请读者补述). 为证 $\mathfrak{g}$ 和 T_eG 同构, 定义映射 $\alpha : \mathfrak{g} \to T_eG$ 为 $\alpha(X) = X(e)$, $X \in \mathfrak{g}$. 显然 α 是线性映射, 下证 α 既是单射又是满射.

若 $X, Y \in \mathfrak{g}$ 使得 $\alpha(X) = \alpha(Y)$ 即 $X(e) = Y(e)$, 则对于任意 $\sigma \in G$,

$$X(\sigma) = X(\sigma e) = X \circ l_\sigma(e) = \mathrm{d}l_\sigma(X(e)) = \mathrm{d}l_\sigma(Y(e)) = Y \circ l_\sigma(e) = Y(\sigma),$$

因此 $X = Y$, 这说明 α 是单射.

注意到对任意 $\sigma \in G$, 左平移 $l_\sigma : G \to G$ 是微分同胚, 故有线性同构 $(\mathrm{d}l_\sigma)_e : T_eG \to T_\sigma G$. 任取切向量 $X_e \in T_eG$, 借助于左平移可在 G 上产生一个向量场 X, 使得

$$X(\sigma) = (\mathrm{d}l_\sigma)_e(X_e), \quad \text{对每一}\sigma \in G,$$

此时 $\alpha(X) = X(e) = (\mathrm{d}l_e)_e(X_e) = X_e$. 说明 α 是满射. 又 X 是左不变的, 因为对于 G 中所有 σ 和 τ,

$$X \circ l_\tau(\sigma) = X(\tau\sigma) = (\mathrm{d}l_{\tau\sigma})_e(X_e) = (\mathrm{d}l_\tau)_\sigma \circ (\mathrm{d}l_\sigma)_e(X_e) = (\mathrm{d}l_\tau)_\sigma(X(\sigma)),$$

从而 $X\circ l_\tau = \mathrm{d}l_\tau \circ X$. 于是 α 是线性同构.

(ii) 任取 $X\in\mathfrak{g}$, 需证 X 是 C^∞ 的. 依命题 2.2.1(iii), 对每一个 $f\in C^\infty(G)$, 只需证明 $Xf\in C^\infty(G)$. 因为

$$(Xf)(\sigma)=X_\sigma f=\mathrm{d}l_\sigma(X_e)f=X_e(f\circ l_\sigma),$$

因此证明 $\sigma\mapsto X_e(f\circ l_\sigma)$ 是 G 上的 C^∞ 函数即可. 为此, 令 $\varphi: G\times G\to G$ 表示群的乘法, $\varphi(\sigma,\tau)=\sigma\tau$, 令 i_e 和 i'_σ 是由 $i_e(\tau)=(\tau,e)$ 和 $i'_\sigma(\tau)=(\sigma,\tau)$ 定义的从 G 到 $G\times G$ 的映射. 显然它们是 C^∞ 的. 假设 Y 是 G 上的光滑向量场使得 $Y(e)=X(e)$, 那么 $(0,Y)$ 是 $G\times G$ 上的 C^∞ 向量场, 而且 $[(0,Y)(f\circ\varphi)]\circ i_e$ 是 G 上的 C^∞ 函数. 利用习题 2 第 21 题的 (d) 得出

$$\begin{aligned}[(0,Y)(f\circ\varphi)]\circ i_e(\sigma)&=(0,Y)_{(\sigma,e)}(f\circ\varphi)\\&=0_\sigma(f\circ\varphi\circ i_e)+Y_e(f\circ\varphi\circ i'_\sigma)\\&=X_e(f\circ\varphi\circ i'_\sigma)=X_e(f\circ l_\sigma),\end{aligned}$$

于是 $\sigma\mapsto X_e(f\circ l_\sigma)$ 是 G 上的 C^∞ 函数.

(iii) 由 (ii) 知, 左不变向量场都是光滑的, 因此它们的括号积有定义. 设 X,Y 是 G 上的左不变光滑向量场, 则 X 与其自身是 l_σ- 相关的, 并且 Y 与其自身也是 l_σ- 相关的, 据命题 2.2.3, $[X,Y]$ 与其自身必 l_σ- 相关, 依定义 3.1.5, $[X,Y]$ 是 G 上的左不变向量场.

定义 3.1.6 李群 G 上全体左不变向量场关于括号积构成的李代数叫做**李群G的李代数**.

由命题 3.1.1 知, 李群 G 上的每一个左不变向量场 X 在 G 中每一点的值由它在单位元 e 的值唯一确定, 并且对于任意指定的切向量 $X_e\in T_eG$, 借助左平移可将它扩张为 G 上的左不变向量场, 因此我们可以在切空间 T_eG 中引入括号积, 定义为

$$[X_e,Y_e]=[X,Y](e),\quad 对每一X_e,Y_e\in T_eG,$$

其中 X,Y 是由 X_e,Y_e 经左平移产生的左不变向量场. 这样一来, T_eG 便成为一个李代数, $\alpha:\mathfrak{g}\to T_eG$ 不仅是线性同构, 并且保持括号积, 即

$$\alpha([X,Y])=[\alpha(X),\alpha(Y)],$$

因此 α 称为李代数 $\mathfrak{g}$ 与 T_eG 的同构. 从这种同构的观点来看, 李群 G 的李代数既可定义为 G 上左不变向量场的李代数, 也可看作在单位元处具有李代数结构的切空间 T_eG.

例 13 证明李群 $GL(n,\mathbb{R})$ 的李代数是 $gl(n,\mathbb{R})$.

$n\times n$ 实矩阵的集合 $gl(n,\mathbb{R})$ 是一个 n^2 维实向量空间. 而任何有限维实向量空间 V 都有一个自然的流形结构. 若 $\{e_i\}$ 是 V 的一个基, $\{r_i\}$ 为对偶基, $p\in V$, 则有一个由

$$\sum a_i \left.\frac{\partial}{\partial r_i}\right|_p \mapsto \sum a_i e_i$$

给定的 V 在点 p 的切空间 T_pV 与 V 自身的自然等同, 并且这一等同不依赖于基的选取. 下面的讨论中将使用这个等同关系.

由例 8 知, $gl(n,\mathbb{R})$ 是李代数. 令 x_{ij} 是 $gl(n,\mathbb{R})$ 上的整体坐标函数, 它将 $gl(n,\mathbb{R})$ 中每一个矩阵 A 对应于它的位于第 i 行第 j 列的元素. 令 $\alpha: T_Igl(n,\mathbb{R})\to gl(n,\mathbb{R})$ 是向量空间 $gl(n,\mathbb{R})$ 在单位矩阵 I 处的切空间与 $gl(n,\mathbb{R})$ 的等同, 因而对于 $v\in T_Igl(n,\mathbb{R})$,

$$\alpha(v)_{ij}=v(x_{ij}).$$

设 $\mathfrak{g}$ 是 $GL(n,\mathbb{R})$ 的李代数. 因 $GL(n,\mathbb{R})$ 是 $gl(n,\mathbb{R})$ 的开子流形, 故 $T_IGL(n,\mathbb{R})=T_Igl(n,\mathbb{R})$, 从而有一个由

$$\beta(X)=\alpha(X(I))$$

定义的映射 $\beta:\mathfrak{g}\to gl(n,\mathbb{R})$. 显然 β 是向量空间的同构, 下证 β 是一个李代数同构, 为此只需证明: 当 $X,Y\in\mathfrak{g}$ 时, $\beta([X,Y])=[\beta(X),\beta(Y)]$.

当 $A,B\in GL(n,\mathbb{R})$ 时, 有

$$(x_{ij}\circ l_A)(B)=x_{ij}(AB)=\sum_k x_{ik}(A)x_{kj}(B).$$

因 Y 是左不变向量场, 故有

$$\begin{aligned}(Y(x_{ij}))(A)&=\mathrm{d}l_A(Y_I)(x_{ij})=Y_I(x_{ij}\circ l_A)\\&=\sum_k x_{ik}(A)Y_I(x_{kj})=\sum_k x_{ik}(A)\alpha(Y(I))_{kj}\\&=\sum_k x_{ik}(A)\beta(Y)_{kj},\end{aligned}$$

利用上式, 能够算出 $\beta[(X,Y)]$ 的位于第 i 行第 j 列的元素为

$$\begin{aligned}\beta[(X,Y)]_{ij}=[X,Y]_I(x_{ij})\quad&=X_I(Y(x_{ij}))-Y_I(X(x_{ij}))\\&=\sum_k\{X_I(x_{ik})\beta(Y)_{kj}-Y_I(x_{ik})\beta(X)_{kj}\}\\&=\sum_k\{\beta(X)_{ik}\beta(Y)_{kj}-\beta(Y)_{ik}\beta(X)_{kj}\}\\&=[\beta(X),\beta(Y)]_{ij}.\end{aligned}$$

因此 β 是一个李代数同构. 从同构的意义上, 我们把 $gl(n,\mathbb{R})$ 看作 $GL(n,\mathbb{R})$ 的李代数.

$n\times n$ 复矩阵的集合 $gl(n,\mathbb{C})$ 是一个 $2n^2$ 维实向量空间, 它的基由 $n\times n$ 矩阵 E_{ij} 和 $\sqrt{-1}E_{ij}(i,j=1,\cdots,n)$ 组成, 这里 E_{ij} 表示除了位于第 i 行第 j 列的元素为 1 外, 其余元素全为 0 的 $n\times n$ 矩阵. 如果令 $[A,B]=AB-BA$, 则 $gl(n,\mathbb{C})$ 构成一个李代数. $GL(n,\mathbb{C})$ 作为 $gl(n,\mathbb{C})$ 的开子集继承一个流形结构并且在矩阵的乘法下成为一个李群. 类似于上面关于实情形的讨论, 可以导出 $GL(n,\mathbb{C})$ 的李代数与 $gl(n,\mathbb{C})$ 的等同是一个李代数同构, 所以可以把 $gl(n,\mathbb{C})$ 看作 $GL(n,\mathbb{C})$ 的李代数.

命题 3.1.2 李群 G 上的每一个非零的左不变向量场是完备向量场. 详言之, 若 X 是 G 上的左不变向量场, 则存在 G 上的整体流 $h:\mathbb{R}\times G\to G$, 使得它的速度场就是 X.

证明 根据定理 2.2.2, 存在单位元 e 的开邻域 V_e 和 $\widetilde{\varepsilon}>0$ 以及 C^∞ 映射 $h_e:(-\widetilde{\varepsilon},\widetilde{\varepsilon})\times V_e\to G$, 使得对于每个 $\tau\in V_e$, 由 $\alpha_\tau(t)=h_e(t,\tau)$ 定义的曲线 $\alpha_\tau:(-\widetilde{\varepsilon},\widetilde{\varepsilon})\to G$ 是 X 的满足 $\alpha_\tau(0)=\tau$ 的唯一积分曲线. 简言之, $X|_{V_e}$ 是 h_e 的速度场. 由于 $h_e(0,e)=e$, 且映射 h_e 是连续的, 因此存在正数 $\varepsilon\leqslant\widetilde{\varepsilon}$ 及点 e 的开邻域 $U_e\subset V_e$, 使得

$$h_e((-\varepsilon,\varepsilon)\times U_e)\subset V_e.$$

此外, 对每个 $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, 由 $(h_e)_t(\tau)=h_e(t,\tau)$ 定义的 C^∞ 映射 $(h_e)_t:V_e\to G$ 具有定理 2.2.2 中性质 (i), (ii), 因而 $\{(h_e)_t\}$ 叫做定义在 V_e 上的局部 1- 参数变换群.

任取 $\gamma\in G$, 则 $V_\gamma=\gamma V_e=l_\gamma(V_e)$ 是 γ 在 G 中的开邻域. 令 $h_\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\times V_\gamma\to G$ 定义为

$$h_\gamma(t,\tau)=\gamma\cdot h_e(t,\gamma^{-1}\tau),\ (t,\tau)\in(-\varepsilon,\varepsilon)\times V_\gamma,$$

那么 $X|_{V_\gamma}$ 是 h_γ 的速度场. 事实上, 我们有

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}h_\gamma(t,\tau)=\mathrm{d}l_\gamma\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}h_e(t,\gamma^{-1}\tau)\right)=\mathrm{d}l_\gamma(X(\gamma^{-1}\tau))=X(\tau),$$

而最后一个等号成立是依据 X 的左不变性. 根据 h_γ 的构作, 显然有

$$h_\gamma((-\varepsilon,\varepsilon)\times U_\gamma)\subset V_\gamma,\quad 其中\quad U_\gamma=\gamma U_e\subset V_\gamma, \tag{1}$$

并且 $\{(h_\gamma)_t\}$ 是定义在 V_γ 上的局部 1- 参数变换群. 注意当 $V_\gamma\cap V_{\gamma_1}\neq\varnothing$ 时, 相应的 h_γ 和 h_{γ_1} 在 $(-\varepsilon,\varepsilon)\times(V_\gamma\cap V_{\gamma_1})$ 上是一致的, 因此由诸 h_γ 可定义 $h:(-\varepsilon,\varepsilon)\times G\to G$ 如下: 若 $\tau\in V_\gamma$, 则令 $h(t,\tau)=h_\gamma(t,\tau), |t|<\varepsilon$.

映射 h 显然是 C^∞ 的, 并且 $h(0,\tau)=\tau,\forall\tau\in G$, 即 $h_0=id:G\to G$. 下面证明: 当 $|t|<\varepsilon,|s|<\varepsilon,|t+s|<\varepsilon$ 时, 有 $h_{t+s}(\tau)=h_t\circ h_s(\tau)$, 对每一 $\tau\in G$.

任取 $\tau \in G$. 因 $\{U_\gamma\}$ 是 G 的开覆盖, 不妨设 $\tau \in U_\gamma$ 对某一 $\gamma \in G$. 由 (1) 式知, 当 $|s| < \varepsilon$ 时, $(h_\gamma)_s(\tau) \in V_\gamma$. 由于 $\{(h_\gamma)_t\}$ 是局部 1- 参数变换群, 因此

$$h_\gamma(t, h_\gamma(s,\tau)) = h_\gamma(t+s,\tau),$$

也就是 $h(t, h(s,\tau)) = h(t+s,\tau)$.

最后将 h 的定义域从 $(-\varepsilon,\varepsilon)\times G$ 扩张到 $\mathbb{R}\times G$, 这只要按照定理 2.2.3 证明的后半部分来构作就行了. 这样一来, 我们得到一个 C^∞ 映射 $h:\mathbb{R}\times G \to G$ 具有性质: (i) $h_0 = id_G$, (ii) 对任意 $t,s\in\mathbb{R}, h_{t+s} = h_t \circ h_s$, 即 h 是 G 上的整体流, 并且它的速度场就是 X.

3.1.4　左不变 1 次微分形式

本段介绍李群上的左不变 1 次微分形式, 称为李群的 Maurer-Cartan 形式, 它们与李群的左不变向量场相对偶.

定义 3.1.7　设 G 为李群, $\omega \in A^1(G)$ 为 G 上的 1- 形式. 若对任意 $\sigma \in G$,

$$l_\sigma^*\omega = \omega,$$

则称 ω 为李群 G 上的**左不变 1 次微分形式**, 也称为**Maurer-Cartan 形式**.

因为对任意 $\sigma \in G$, $l_\sigma : G \to G$ 是微分同胚, 因此在任意一点 $\tau \in G$, $\mathrm{d}l_\sigma : T_\tau G \to T_{\sigma\tau}G$与$l_\sigma^* : T_{\sigma\tau}^*G \to T_\tau^*G$ 均为线性同构, 于是 G 上的 1- 形式 ω 是左不变的当且仅当对任意 $\tau \in G$ 有 $l_\sigma^*(\omega(\sigma\tau)) = \omega(\tau)$, 即对任意 $X \in T_\tau G$, 有 $\omega(\tau)(X) = \omega(\sigma\tau)(\mathrm{d}l_\sigma(X))$.

注　若 ω 是 G 上的 p- 形式 $(p \geqslant 1)$, 并且对任意 $\sigma \in G$, 有 $l_\sigma^*\omega = \omega$, 则称 ω 为 G 上的**左不变p-形式**.

命题 3.1.3　设 G 是李群, $\omega \in A^1(G)$, 则 ω 是 G 上的左不变微分形式当且仅当 ω 在 G 的任意一个左不变向量场上的值是常数.

证明　"$\Rightarrow$" 留作练习, 下证 "$\Leftarrow$".

设 $\mathfrak{g}$ 是李群 G 的李代数. 任取 $X \in \mathfrak{g}$, 依假设, 对于任意点 $\tau \in G$, $(\omega(X))(\tau) = (\omega(X))(e) = \omega(e)(X(e))$, 下面证明 ω 是左不变的.

对于任意的 $\sigma \in G$, 在 $\tau \in G$ 处我们有

$$\begin{aligned}((l_\sigma^*\omega)(\tau))(X(\tau)) &= \omega(\sigma\tau)(\mathrm{d}l_\sigma(X(\tau)) = \omega(\sigma\tau)(X(\sigma\tau))\\ &= \omega(X)(\sigma\tau) = \omega(X)(\tau) = \omega(\tau)(X(\tau)),\end{aligned}$$

因为 $\{X(\tau)|X \in \mathfrak{g}\} = T_\tau G$, 上式表明

$$(l_\sigma^*\omega)(\tau) = \omega(\tau)$$

对每一 $\tau \in G$ 皆成立, 这说明 ω 是左不变的.

依据命题 3.1.3, G 上的每一个左不变 1- 形式 ω 可以看成定义在 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 上的线性函数 $\omega: \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, 使得对任意 $X \in \mathfrak{g}$, $\omega(X) = (\omega(X))(e)$. 从而 G 上的所有左不变 1- 形式构成一个向量空间, 它是 $\mathfrak{g}$ 的对偶空间, 记为 $\mathfrak{g}^*$.

设 $\{X_1, \cdots, X_r\}$ 是 r 维李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的基. 令 $\{\omega_1, \cdots, \omega_r\}$ 为 $\mathfrak{g}^*$ 的对偶基, 因而对任意 $\sigma \in G$, 有 $l_\sigma^* \omega_i = \omega_i, i = 1, \cdots, r$. 由定理 2.5.2 知, l_σ^* 与外微分 d 可交换, 故 $(\mathrm{d} \circ l_\sigma^*)\omega_i = l_\sigma^*(\mathrm{d}\omega_i) = \mathrm{d}\omega_i, i = 1, \cdots, r$, 这说明 $\mathrm{d}\omega_i (i = 1, \cdots, r)$ 是 G 上的左不变 2- 形式, 能用 $\{\omega_i\}$ 的外积表示, 进而有下列结果.

命题 3.1.4 设 $\{X_1, \cdots, X_r\}$ 是 r 维李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的基, 令 $\{\omega_1, \cdots, \omega_r\}$ 为 $\mathfrak{g}^*$ 的对偶基, 则

$$\mathrm{d}\omega_i = -\sum_{j<k} c_{jk}^i \omega_j \wedge \omega_k, \tag{2}$$

其中 c_{jk}^i 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的结构常数. 方程 (2) 叫做李群 G 的**结构方程**或**Maurer-Cartan 方程**.

证明留作练习.

3.2 指数映射

从数学分析知道指数函数 e^x 可用幂级数来定义, 即 $\mathrm{e}^x = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. 将 x 换为矩阵 A, 通过对矩阵取幂, 令 $\mathrm{e}^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots$, 本节将证明这是有意义的, 并且当 $A \in gl(n, \mathbb{C})$ 时, $\mathrm{e}^A \in GL(n, \mathbb{C})$. 将它推广到任意李群正是本节讨论的指数映射. 指数映射提供了李群与它的李代数之间的一种重要联系. 为引入这一概念, 我们从介绍李群的单参数子群入手.

3.2.1 单参数子群

定义 3.2.1 设 G 为李群, 并将 $\mathbb{R}$ 看作实数关于加法所构成的 1 维李群. 若映射 $\alpha: \mathbb{R} \to G$ 是 C^∞ 的, 同时它又是抽象群的同态, 则称 α 是从李群 $\mathbb{R}$ 到李群 G 的**同态**, 并将 $\{\alpha(t) | t \in \mathbb{R}\}$ 叫做 G 中的**单参数子群**.

定理 3.2.1 李群 G 上任意一个非零的左不变向量场 X 唯一地决定一个 G 中的单参数子群 $\{\alpha(t) | \in \mathbb{R}\}$, 使得在点 $\alpha(t)$ 处的切向量为 $X_{\alpha(t)}$.

证明 由命题 3.1.2 知, 存在 G 的整体流 $h: \mathbb{R} \times G \to G$, 使得它的速度场为 X, 令 $\alpha: \mathbb{R} \to G$ 定义为 $\alpha(t) = h(t, e) = h_t(e), t \in \mathbb{R}$. 显然 α 是 C^∞ 映射, 并且它是过单位元 e 的流线, 因而在每一点 $\alpha(t)$ 处的切向量为 $X_{\alpha(t)}$. 余下只需证明 α 是群同态, 即证: 对任意 $t, s \in \mathbb{R}, \alpha(t + s) = \alpha(t)\alpha(s)$.

依据命题 2.2.5, 对任意 $\sigma \in G, \{l_\sigma \circ h_t \circ (l_\sigma)^{-1} | t \in \mathbb{R}\}$ 是 G 上的单参数 C^∞ 变换群, 相应的速度场 $\widetilde{X}$ 满足如下关系: $\mathrm{d}l_\sigma \circ X = \widetilde{X} \circ l_\sigma$. 而 X 是左不变向量场, 故 $\mathrm{d}l_\sigma \circ X = X \circ l_\sigma$, 由此可推出 $\widetilde{X} = X$. 从而对每一 $\tau \in G$, 曲线 $\{l_\sigma \circ h_s \circ (l_\sigma)^{-1}(\tau) | s \in \mathbb{R}\}$ 和 $\{h_s(\tau) | s \in \mathbb{R}\}$ 满足相同的常微分方程组和相同的初始条件, 由解的唯一性可知 $(l_\sigma \circ h_s \circ (l_\sigma)^{-1})(\tau) = h_s(\tau)$, 因而 $l_\sigma \circ h_s = h_s \circ l_\sigma$ 对任意 $\sigma \in G$ 皆成立. 这样一来, 便有

$$\begin{aligned}\alpha(t+s) &= h_{s+t}(e) = h_s \circ h_t(e) = h_s(\alpha(t)) = h_s \circ l_{\alpha(t)}(e) \\ &= l_{\alpha(t)} \circ h_s(e) = l_{\alpha(t)}(\alpha(s)) = \alpha(t) \cdot \alpha(s).\end{aligned}$$

于是 $\alpha : \mathbb{R} \to G$ 是李群的同态, $\{\alpha(t) | t \in \mathbb{R}\}$ 是 G 中的单参数子群.

推论 3.2.1　设 X 是李群 G 上的一个左不变向量场, 记 $h : \mathbb{R} \times G \to G$ 是由 X 决定的整体流, $\{\alpha(t) = h_t(e) | t \in \mathbb{R}\}$ 为 G 中的单参数子群, 则

(i) $l_\sigma \circ \alpha : \mathbb{R} \to G$ 是 X 的唯一一条在点 0 取值为 σ 的积分曲线,

(ii) 单参数 C^∞ 变换群 $\{h_t\}$ 可如下给定:$h_t = r_{\alpha(t)}$.

证明　(i) 记 $\beta = l_\sigma \circ \alpha$, 显然 $\beta(0) = l_\sigma(\alpha(0)) = l_\sigma(e) = \sigma$. 因 $\alpha : \mathbb{R} \to G$ 是 X 的一条积分曲线, 又 X 是左不变的, 故 $\dot{\beta}(t) = \mathrm{d}l_\sigma(\dot{\alpha}(t)) = \mathrm{d}l_\sigma(X_{\alpha(t)}) = X_{l_\sigma \circ \alpha(t)} = X_{\beta(t)}$, 这说明 β 也是 X 的一条积分曲线. 至于唯一性显而易见, 不再赘述.

(ii) 在定理 3.2.1 的证明中已得到: 对任意 $\sigma \in G$, 有

$$l_\sigma \circ h_t = h_t \circ l_\sigma,$$

将上式作用于单位元 e 上, 我们有 $l_\sigma(h_t(e)) = h_t(l_\sigma(e))$, 即 $\sigma \cdot \alpha(t) = h_t(\sigma)$ 或 $r_{\alpha(t)}(\sigma) = h_t(\sigma)$, 于是 $h_t = r_{\alpha(t)}$.

为表明单参数子群 $\{\alpha(t) | t \in \mathbb{R}\}$ 是由左不变向量场 X 决定的, 将 $\{\alpha(t)\}$ 改写为 $\{\alpha_X(t)\}$ 或将李群同态 $\alpha : \mathbb{R} \to G$ 改写为 $\exp_X : \mathbb{R} \to G$, 因而相应的子群写为 $\{\exp_X(t) | t \in \mathbb{R}\}$.

由定理 3.2.1 及习题 3 第 9 题可知, 李群 G 的李代数与 G 的单参数子群之间有一一对应关系.

3.2.2　指数映射

定义 3.2.2　设 $\mathfrak{g}$ 是李群 G 的李代数, 定义映射 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ 为: 对每一 $X \in \mathfrak{g}$, $\exp(X) = \exp_X(1)$, 称为李群 G 的**指数映射**.

定理 3.2.2　设 G 为李群, $\mathfrak{g}$ 为它的李代数, $X \in \mathfrak{g}$, 则

(i) $\exp(tX) = \exp_X(t)$　对每一 $t \in \mathbb{R}$,

(ii) $\exp(t_1 + t_2)X = \exp t_1 X \cdot \exp t_2 X$　对所有 $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$,

(iii) $\exp(-tX) = (\exp tX)^{-1}$　对每一 $t \in \mathbb{R}$,

(iv) $\exp:\mathfrak{g}\to G$ 是 C^∞ 映射, 并且 $\mathrm{d}\exp: T_0\mathfrak{g}\to T_eG$(按通常的等同) 是恒等映射, 因而 exp 给出 $\mathfrak{g}$ 中 0 的一个邻域到 G 中 e 的一个邻域上的微分同胚.

证明 (i) 从 $\mathbb{R}$ 到 G 中的映射 φ 和 ψ 分别定义为

$$\varphi(s)=\exp_{tX}(s) \quad \text{和} \quad \psi(s)=\exp_X(ts),$$

其中 $s\in\mathbb{R}$. φ 是 tX 的唯一一条过点 $\varphi(0)=e$ 的积分曲线. 而

$$\dot{\psi}(s)=\mathrm{d}\psi\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=s}\right)=\mathrm{d}\exp_X\left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=ts}\right)=tX|_{\exp_X(ts)}=tX_{\psi(s)},$$

因此 ψ 也是 tX 的一条积分曲线并且 $\psi(0)=e$. 由积分曲线的唯一性知, $\varphi=\psi$, 即

$$\exp_{tX}(s)=\exp_X(ts), \quad t,s\in\mathbb{R}, X\in\mathfrak{g},$$

特别取 $s=1$, 得 $\exp_{tX}(1)=\exp_X(t)$, 即 $\exp(tX)=\exp_X(t)$.

(ii) 因为 $\exp_X:\mathbb{R}\to G$ 是从 $\mathbb{R}$ 到 G 中的同态, 那么根据 (i) 有

$$\exp(t_1+t_2)X=\exp_X(t_1+t_2)=\exp_X(t_1)\cdot\exp_X(t_2)=\exp(t_1X)\cdot\exp(t_2X).$$

(iii) 留作练习.

(iv) 在 $G\times\mathfrak{g}$ 上定义向量场 V 为 $V(\sigma,X)=(X(\sigma),0)\in T_\sigma G\bigoplus T_X\mathfrak{g}$. 因 X 是 G 上的完备向量场, 故 V 是 $G\times\mathfrak{g}$ 上的完备向量场. 依据推论 3.2.1(i), V 的经过点 (σ,X) 的积分曲线是 $t\longmapsto(\sigma\exp_X t,X)$, 由此可见 $G\times\mathfrak{g}$ 上的单参数 C^∞ 变换群 $\{h_t:G\times\mathfrak{g}\to G\times\mathfrak{g}\}$ 可如下给出:

$$h_t(\sigma,X)=(\sigma\exp tX,X).$$

令 $\pi:G\times\mathfrak{g}\to G$ 为投影, 则 $\exp X=\pi\circ h_1(e,X)$, exp 作为两个 C^∞ 映射的复合必是 C^∞ 的. 下证 $\mathrm{d}\exp:T_0\mathfrak{g}\to T_eG$ 是恒等映射.

因 tX 作为实向量空间 $\mathfrak{g}$ 中的一条曲线, 它在 $t=0$ 处的切向量是 $X\in T_0\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$. 而 $\exp tX=\exp_X(t)$ 是 G 中的一条曲线, 它在 $t=0$ 处的切向量是 $X(e)\in T_eG$. 据命题 3.1.1, $\mathfrak{g}$ 与 T_eG 是线性同构的, 同构映射 $\alpha:\mathfrak{g}\to T_eG$ 为 $\alpha(X)=X(e)$. 将 $\mathfrak{g}$ 与 T_eG 等同, 这说明 $\mathrm{d}\exp=id:T_0\mathfrak{g}\to T_eG$. 最后由反函数定理可知, exp 给出 $\mathfrak{g}$ 中 0 的一个邻域到 G 中 e 的一个邻域上的微分同胚.

假设 G 是 r 维李群, $\{X_1,\cdots,X_r\}$ 是 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的基. 由习题 3 第 3 题知, G 上的左不变向量场可表示成 $X_i(i=1,\cdots,r)$ 的常系数线性组合. 根据定理 3.2.2 中的 (iv), 在 $\mathfrak{g}$ 中存在中心在 0 的 “开方体”$\left\{\sum\limits_{i=1}^{r}x_iX_i\bigg||x_i|<\varepsilon,i=1,\cdots,r\right\}$, 使得

G 中子集 $U = \left\{ \exp\left(\sum_{i=1}^{r} x_i X_i\right) \middle| |x_i| < \varepsilon, i = 1, \cdots, r \right\}$ 为 G 的单位邻域. 在 U 中引入映射 $\varphi : \exp\left(\sum_{i=1}^{r} x_i X_i\right) \longmapsto (x_1, \cdots, x_r) = x$, 则 $(U, \varphi; x_1, \cdots, x_r)$ 是 G 的一个局部坐标系, 利用它可构作 G 的微分结构

$$\{(\sigma U, \varphi_\sigma) = (\sigma U, \varphi \circ l_{\sigma^{-1}}) | \forall \sigma \in G\},$$

这时称在 G 中引进了**第一类标准坐标系**.

G 中任一单参数子群 $\left\{ \exp tX = \exp\left(t \sum_{i=1}^{r} a_i X_i\right) \right\}$ 在 (U, φ) 内有坐标为 $t(a_1, \cdots, a_r)$ 的点, 这里 $|t| < \dfrac{\varepsilon}{\max\{|a_1|, \cdots, |a_r|\}}$. 反之, (U, φ) 中坐标为 $t(a_1, \cdots, a_r)$ $\left(\text{其中 } |t| < \dfrac{\varepsilon}{\max\{|a|, \cdots, |a_r|\}}\right)$ 的点生成在 $t = 0$ 处切向量为 $(a_1, \cdots, a_r)$ 的单参数子群. 因此对 U 中的任意一点, 过这点必定存在一个单参数子群, 从而有 $U \subset \exp \mathfrak{g}$. 再利用推论 3.1.1, 便可得到下列命题.

命题 3.2.1　设 G 为连通李群, 记它的李代数为 $\mathfrak{g}$, 则 $\exp \mathfrak{g}$ 生成 G.

例 1　复一般线性群 $GL(n, \mathbb{C})$ 的指数映射.

$GL(n, \mathbb{C})$ 是由非奇异 $n \times n$ 复矩阵组成的乘法群, 它是一个 $2n^2$ 维李群, 其单位元是 n 阶单位矩阵 I. 由 n 阶复矩阵组成的 $gl(n, \mathbb{C})$ 是 $GL(n, \mathbb{C})$ 的李代数.

对于任意的 $A \in gl(n, \mathbb{C})$, 令

$$\mathrm{e}^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \tag{1}$$

并规定 $A^0 = I$. 为说明这一定义有意义, 需证明 (1) 式右边收敛. 在 $gl(n, \mathbb{C})$ 内选取一个有界区域 Ω, 则存在数 $\mu > 0$, 使得对任意 $A \in \Omega$, 矩阵 A 的每一个元素 $x_{ij}(A)$ 满足 $|x_{ij}(A)| \leqslant \mu, i, j = 1, \cdots, n$. 进而用数学归纳法可以证明: 对任意正整数 k, A^k 的每一个元素 $x_{ij}(A^k)$ 满足不等式 $|x_{ij}(A^k)| \leqslant n^{k-1}\mu^k$. 由于数项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{k-1}\mu^k}{k!}$ 收敛, 因而级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_{ij}(A^k)}{k!} \quad (i, j = 1, \cdots, n)$$

对于 Ω 中的 A 一致收敛, 所以 (1) 式右边的幂级数在 Ω 内一致收敛.

取部分和, 用 $S_k(A)$ 记幂级数 (1) 的前 $k+1$ 项之和, 即

$$S_k(A)=I+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots+\frac{A^k}{k!},$$

则 $\mathrm{e}^A=\lim\limits_{k\to\infty}S_k(A)$. 任取 $B\in GL(n,\mathbb{C})$, 则有

$$B\cdot S_k(A)\cdot B^{-1}=S_k(B\cdot A\cdot B^{-1}),$$

在等式两边取极限, 得

$$B\cdot\mathrm{e}^A\cdot B^{-1}=\mathrm{e}^{BAB^{-1}}. \tag{2}$$

线性代数中有一个结论是说每一个 $n\times n$ 复矩阵 A 相似于一个 Jordan 矩阵, 因而存在 $B\in GL(n,\mathbb{C})$ 使得 $B\cdot A\cdot B^{-1}$ 为上三角矩阵, 并且位于对角线上的元素是矩阵 A 的特征值. 设矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 则

$$B\cdot A\cdot B^{-1}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & *\\ & & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

并且

$$B\cdot A^k\cdot B^{-1}=\begin{bmatrix}\lambda_1^k & & *\\ & & \\ 0 & & \lambda_n^k\end{bmatrix},$$

于是

$$B\cdot\mathrm{e}^A\cdot B^{-1}=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\lambda_1} & & *\\ & & \\ 0 & & \mathrm{e}^{\lambda_n}\end{bmatrix},$$

$$\det\mathrm{e}^A=\prod_{i=1}^n\mathrm{e}^{\lambda_i}=\mathrm{e}^{\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i}=\mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}. \tag{3}$$

由此可见, 对每一 $A\in gl(n,\mathbb{C})$, $\det\mathrm{e}^A\neq 0$, 故 $\mathrm{e}^A\in GL(n,\mathbb{C})$.

对于 $A\in gl(n,\mathbb{C})$, 考虑映射 $\mathbb{R}\to GL(n,\mathbb{C}), t\longmapsto\mathrm{e}^{tA}=I+tA+\dfrac{t^2}{2!}A^2+\cdots+\dfrac{t^k}{k!}A^k+\cdots=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^k}{k!}A^k$. 因为 $\mathrm{e}^{tA}(\in GL(n,\mathbb{C}))$ 的每个元素 (共 n^2 个) 的实部和虚部都是 t 的幂级数, 而且收敛半径为无穷大, 因此映射 $t\longmapsto\mathrm{e}^{tA}$ 是 C^∞ 的, 并且它在 $0\in\mathbb{R}$ 的切向量是 A(通过逐项微分幂级数可知). 又 $\mathrm{e}^{tA}|_{t=0}=I, \mathrm{e}^{tA}\cdot\mathrm{e}^{sA}=\mathrm{e}^{(t+s)A}$, 所以这个映射还是群同态. 由此可见, $\{\mathrm{e}^{tA}|t\in\mathbb{R}\}$ 是 $GL(n,\mathbb{C})$ 中的一个单参数子

群. 根据指数映射的定义, $\exp: gl(n,\mathbb{C}) \to GL(n,\mathbb{C})$ 由 $\exp A = \mathrm{e}^A$ 给出. 任意李群的指数映射的名称正是由此而来.

如果 $A \in gl(n,\mathbb{R})$, 那么依 (1) 式给出的 $\mathrm{e}^A \in GL(n,\mathbb{R})$, 而且 $A \longmapsto \mathrm{e}^A$ 是实一般线性群 $GL(n,\mathbb{R})$ 的指数映射.

现设 V 是实或复向量空间, 则 V 上所有自同构之集 $\mathrm{Aut}(V)$ 是李群, V 上的所有自同态之集 $\mathrm{End}(V)$ 是 $\mathrm{Aut}(V)$ 的李代数. 类似地, 定义指数映射 $\exp: \mathrm{End}(V) \to \mathrm{Aut}(V)$ 如下: 对 $l \in \mathrm{End}(V)$, 令

$$\exp(l) = 1 + l + \frac{l^2}{2!} + \cdots + \frac{l^k}{k!} + \cdots, \tag{4}$$

其中 l^k 表示 l 与其自身的 k 次复合, 而 1 表示 V 上的恒等变换.

例 2　设 $A = \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{bmatrix} \in gl(2,\mathbb{R})$, 则

$$\begin{aligned}
\exp\begin{bmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{bmatrix} &= I + \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} -\theta^2 & 0 \\ 0 & -\theta^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} 0 & -\theta^3 \\ \theta^3 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{4!}\begin{bmatrix} \theta^4 & 0 \\ 0 & \theta^4 \end{bmatrix} + \frac{1}{5!}\begin{bmatrix} 0 & \theta^5 \\ -\theta^5 & 0 \end{bmatrix} + \cdots \\
&= \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \cdots & \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots \\ -\theta + \frac{1}{3!}\theta^3 - \frac{1}{5!}\theta^5 + \cdots & 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \cdots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in GL(2,\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

3.3　李群的同态和李子群

上一节我们考虑了从李群 $\mathbb{R}$ 到任意李群 G 的同态. 从定义 3.2.1 可见这一同态既要保持群结构不变, 又要保持光滑性, 基于这种认识本节讨论李群之间的关系.

3.3.1　李群的同态

定义 3.3.1　设 G, H 是两个李群. 若映射 $\varphi: G \to H$ 是 C^∞ 的并且又是抽象群的群同态, 则称 φ 是一个从李群 G 到李群 H 的**同态**.

如果李群同态 $\varphi: G \to H$ 还是 (作为 C^∞ 流形的)G 和 H 之间的一个微分同胚, 那么称 φ 是一个 (**李群**)**同构**. 李群 G 与其自身的同构称为李群 G 的**自同构**.

定义 3.3.2　设 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ 都是李代数. 如果 $\psi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是线性映射并且保持括号积, 即对所有 $X, Y \in \mathfrak{g}$, $\psi([X,Y]) = [\psi(X), \psi(Y)]$, 那么称 ψ 是一个从李代数 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{h}$ 的

同态.

如果李代数同态 $\psi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ 还是双射, 那么 ψ 叫做一个 (**李代数**)**同构**, $\mathfrak{g}$ 与其自身的同构叫做李代数 $\mathfrak{g}$ 的**自同构**.

设 $\varphi: G\to H$ 是李群 G 与 H 的同态, 则 φ 把 G 的单位元 e 变为 H 的单位元 $\widetilde{e}$, φ 的微分 $\mathrm{d}\varphi: T_eG\to T_{\widetilde{e}}H$ 是一个线性变换. 通过把李群在单位元处的切空间和李群的李代数自然等同 (见定义 3.1.6 后所述), 从 T_eG 到 $T_{\widetilde{e}}H$ 的线性变换 $\mathrm{d}\varphi$ 可诱导李代数 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{h}$ 的一个线性变换, 把它仍记为 $\mathrm{d}\varphi$, 于是有

$$\mathrm{d}\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}.$$

假若 $X\in\mathfrak{g}$, 那么 $\widetilde{X}=\mathrm{d}\varphi(X)$ 是 H 上由

$$\widetilde{X}(\widetilde{e})=\mathrm{d}\varphi(X)(\widetilde{e})=\mathrm{d}\varphi(X(e)) \tag{1}$$

决定的唯一左不变向量场. 事实上,

$$\widetilde{X}(\tau)=(\mathrm{d}l_\tau)_{\widetilde{e}}(\widetilde{X}(\widetilde{e}))=(\mathrm{d}l_\tau)_{\widetilde{e}}(\mathrm{d}\varphi(X(e)) \quad \text{对每一}\tau\in H.$$

定理 3.3.1 设 G, H 是两个李群, 它们的李代数分别是 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$. 若 $\varphi: G\to H$ 是李群的同态, 则

(i) 对于每一个 $X\in\mathfrak{g}$, X 和 $\mathrm{d}\varphi(X)$ 是 φ- 相关的,

(ii) $\mathrm{d}\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ 是一个李代数同态,

此外, 如果 $\varphi: G\to H$ 是李群的同构, 那么 $\mathrm{d}\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ 是李代数的同构.

证明 (i) 令 $\widetilde{X}=\mathrm{d}\varphi(X)$. 因 φ 是同态, 故对任意 $\sigma,\tau\in G$, 有 $\varphi(\sigma\tau)=\varphi(\sigma)\cdot\varphi(\tau)$, 即 $\varphi\circ l_\sigma(\tau)=l_{\varphi(\sigma)}\circ\varphi(\tau)$, 从而 $\varphi\circ l_\sigma=l_{\varphi(\sigma)}\circ\varphi$, 由此可推出: 对任意 $\sigma\in G$, 有

$$\begin{aligned}\widetilde{X}(\varphi(\sigma))&=\mathrm{d}l_{\varphi(\sigma)}(\widetilde{X}(\widetilde{e}))=\mathrm{d}l_{\varphi(\sigma)}(\mathrm{d}\varphi(X(e)))=\mathrm{d}(l_{\varphi(\sigma)}\circ\varphi)(X(e))\\&=\mathrm{d}(\varphi\circ l_\sigma)(X(e))=\mathrm{d}\varphi(X(\sigma)),\end{aligned}$$

即 X 与 $\mathrm{d}\varphi(X)$ 是 φ- 相关的.

(ii) 设 $X,Y\in\mathfrak{g}$, 为证 (ii), 只需证 $\widetilde{[X,Y]}=[\widetilde{X},\widetilde{Y}]$. 由 (i) 知, X, Y 分别与 $\widetilde{X}$ 和 $\widetilde{Y}$ 是 φ- 相关的, 据命题 2.2.3, $[X,Y]$ 和 $[\widetilde{X},\widetilde{Y}]$ 必 φ- 相关, 特别有

$$[\widetilde{X},\widetilde{Y}](\widetilde{e})=\mathrm{d}\varphi([X,Y])(e).$$

而由 (1) 式知, $\widetilde{[X,Y]}$ 是 H 上由它在单位元 $\widetilde{e}$ 处的值 $\mathrm{d}\varphi([X,Y])(e)$ 唯一决定的左不变向量场, 因此 $\widetilde{[X,Y]}=[\widetilde{X},\widetilde{Y}]$, 即 $\mathrm{d}\varphi([X,Y])=[\mathrm{d}\varphi(X),\mathrm{d}\varphi(Y)]$, 故 $\mathrm{d}\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ 是一个李代数同态.

另外, 假若 $\varphi: G \to H$ 是李群的同构, 那么 φ 必为 C^∞ 流形 G 和 H 的微分同胚, 因此 $\mathrm{d}\varphi: T_eG \to T_{\tilde{e}}H$ 是线性同构, 由此导出 $\mathrm{d}\varphi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是李代数同构.

定理 3.3.2 设李群 G, H 的李代数分别为 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$. 假设 $\varphi: G \to H$ 为李群同态, 则下列图表可换

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \uparrow{\scriptstyle \exp} & & \uparrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow[\mathrm{d}\varphi]{} & \mathfrak{h} \end{array}$$

证明 令 $X \in \mathfrak{g}$, 则 G 中由 X 决定的单参数子群是

$$\alpha(t) = \exp_X(t) = \exp(tX), \quad t \in \mathbb{R}$$

因 $\varphi: G \to H$ 是李群同态, 故 $\varphi \circ \alpha: \mathbb{R} \to H$ 为 C^∞ 映射, 且

$$\varphi \circ \alpha(t+s) = \varphi(\alpha(t) \cdot \alpha(s)) = \varphi(\alpha(t)) \cdot \varphi(\alpha(s)),$$

所以 $\varphi \circ \alpha: \mathbb{R} \to H$ 是从李群 $\mathbb{R}$ 到 H 的同态, $\{\varphi(\exp tX) | t \in \mathbb{R}\}$ 是 H 中的单参数子群, 它在点 0 的切向量是 $\mathrm{d}\varphi(X(e))$. 另一方面, $\{\exp t(\mathrm{d}\varphi(X)) | t \in \mathbb{R}\}$ 是 H 中的唯一一个在点 0 的切向量是 $(\mathrm{d}\varphi(X))(\tilde{e})$ 的单参数子群. 据 (1) 式, $\mathrm{d}\varphi(X)(\tilde{e}) = \mathrm{d}\varphi(X(e))$, 因此

$$\varphi(\exp tX) = \exp t(\mathrm{d}\varphi(X)),$$

令 $t = 1$, 得 $\varphi(\exp X) = \exp(\mathrm{d}\varphi(X))$.

推论 3.3.1 设 G 是连通李群, $\varphi, \psi: G \to H$ 是从李群 G 到 H 的两个同态. 如果它们所诱导的李代数同态相同, 即 $\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}\psi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, 那么 $\varphi = \psi$.

证明 任取 $X \in \mathfrak{g}$, 由定理 3.3.2 知,

$$\varphi(\exp X) = \exp(\mathrm{d}\varphi(X)) = \exp(\mathrm{d}\psi(X)) = \psi(\exp X).$$

据命题 3.2.1, G 由 $\exp \mathfrak{g}$ 生成, 因此 $\varphi = \psi$.

命题 3.3.1 设 $\varphi: G \to H$ 是李群的同态, 则 φ^* 把 H 上的左不变 1- 形式拉回到 G 上的左不变 1- 形式.

假若 $\{\omega_1, \cdots, \omega_d\}$ 是 H 上左不变 1- 形式构成的向量空间的一个基, 则 $\{\varphi^*\omega_i | i = 1, \cdots, d\}$ 满足 $\{\omega_i\}$ 所满足的结构方程.

证明 设 $\omega \in \mathfrak{h}^*$ 为 H 上的左不变 1- 形式, 则对任意 $\sigma \in G$, 有

$$l_\sigma^*(\varphi^*\omega) = (\varphi \circ l_\sigma)^*\omega = (l_{\varphi(\sigma)} \circ \varphi)^*\omega = \varphi^*(l_{\varphi(\sigma)}^*\omega) = \varphi^*\omega,$$

因此 $\varphi^*\omega$ 是 G 上的左不变 1- 形式. 此外由命题 3.1.4,

$$\mathrm{d}\omega_i = -\sum_{j<k} c^i_{jk}\omega_j \wedge \omega_k,$$

其中 c^i_{jk} 为李群 H 的结构常数. 而由命题 2.4.3 和定理 2.5.2 知, 诱导映射 φ^* 与外积以及 φ^* 与外微分算子均可交换, 因而有

$$\mathrm{d}(\varphi^*\omega_i) = -\sum_{j<k} c^i_{jk}(\varphi^*\omega_j) \wedge (\varphi^*\omega_k).$$

上面的讨论说明李群的同态可诱导出它们的李代数之间的同态, 并且通过指数映射将这两种同态联系起来. 两李群同构, 则它们对应的李代数也同构. 推论 3.3.1 说明从连通李群到李群的两个同态, 如果它们诱导的李代数同态相同, 那么这两个李群同态必相同. 反过来, 如果在两个李群的李代数之间存在同态, 是否能提升为李群之间的同态呢? 一般来说, 李代数的同态能导出 (局部) 李群的局部同态 (见文献 [17]), 而从局部同态扩展到整个李群上, 这正是李群理论中的一个基本问题. 下面介绍李群论的一个基本定理.

定理 3.3.3 设 G, H 是两个连通李群, 分别以 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 为李代数, 并且 G 是单连通的. 假定 $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 是李代数的同态, 那么存在唯一的一个李群同态 $\varphi : G \to H$ 使得 $\mathrm{d}\varphi = \psi$.

进而, 如果单连通李群 G 和 H 具有同构的李代数, 那么 G 和 H 同构.

定理的证明需用到基本群和覆迭空间的知识, 例如单连通性条件可用基本群来表述. 我们说一个 Hausdorff 拓扑空间是单连通的, 如果它的基本群是平凡群. 等价地, 就是该空间的任意一条闭道路同伦于常值道路, 或者形象地说, 任意一条闭道路可连续地收缩为一点. 对定理证明感兴趣的读者请参看文献 [15] 或 [17].

3.3.2 李子群

定义 3.3.3 设 G, H 是两个李群. 若 (H, φ) 是 G 的一个子流形, 且 $\varphi : H \to G$ 是一个群同态, 则称 (H, φ) 是李群 G 的一个**李子群**.

李群 G 的李子群 (H, φ) 叫做 G 的**闭李子群**, 如果 $\varphi(H)$ 是 G 的一个闭子集.

在 1.5 节中曾考虑子流形的等价, 类似地我们说 G 的两个李子群 (H, φ) 和 (H_1, φ_1) 等价是指存在一个李群同构 $\alpha : H \to H_1$, 使得 $\varphi_1 \circ \alpha = \varphi$. 这是 G 的所有李子群组成的集族上的一个等价关系, 并且李子群的唯一性是指在这种等价意义下的唯一性. 如同子流形的情形那样, G 的李子群的每个等价类 ξ 有唯一的一个形如 (A, i) 的代表, 其中 $A \subset G$, A 不仅是 G 的抽象子群, 而且有拓扑结构 (不必带有子空间拓扑) 和微分结构使之成为李群. 包含映射 $i : A \to G$ 是单一浸入, 即 (A, i) 是 G 的李子群. 事实上, 如果 (H, φ) 是 ξ 的任意代表, 那么 G 的子集 A 必

为 $\varphi(H)$. 而 $\varphi: H \to G$ 是单射, 可把 H 的拓扑结构和微分结构通过 φ 移植到像集 $\varphi(H)$ 上, 使得 $\varphi: H \to \varphi(H)$ 为微分同胚. 另外 $\varphi(H)$ 是 G 的抽象子群, 这样一来, $\varphi(H)$ 成为一个李群. 包含映射 $i: \varphi(H) \to G$ 不仅是群的同态, 而且是单一浸入, 因此 (A, i) 便成为一个等价于 (H, φ) 的李子群. 正因为如此, 有些书将李子群的概念定义如下.

定义 3.3.3′　设 H, G 是两个李群, $H \subset G$. 如果 H 是 G 的子群, 并且包含映射 $i: H \to G$ 是单一浸入, 则称 H 是 G 的李子群.

例如, S^1 是李群 $\mathbb{C}^*$ 的李子群.

定义 3.3.3 和定义 3.3.3′ 是等价的, 不妨对定义 3.3.3 再作一点分析. $\varphi: H \to G$ 是从李群 H 到 G 的一个同态, 并且要求映射 φ 不仅是单射而且是浸入, 从而 $\mathrm{d}\varphi: T_\tau H \to T_{\varphi(\tau)}G$ 作为线性映射对每一 $\tau \in H$ 也是单射, 特别 $\mathrm{d}\varphi: T_e H \to T_e G$ 是单射, 这导致李代数同态 $\mathrm{d}\varphi: \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ 为单同态, $\mathrm{d}\varphi(\mathfrak{h})$ 可以看作 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数.

命题 3.3.2　设 (H, φ) 是李群 G 的一个李子群, $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{g}$ 分别是它们的李代数, 则 $\mathrm{d}\varphi$ 给出 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathrm{d}\varphi(\mathfrak{h})$ 的一个同构.

该命题指出李群的每一个李子群对应着李群的李代数的一个子代数, 问: 这种对应是否是一一对应呢?

定理 3.3.4　设 G 是李群, $\mathfrak{g}$ 是它的李代数. 假设 $\mathfrak{h}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数, 那么 G 有唯一的一个连通李子群 (H, φ) 使得 $\mathrm{d}\varphi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_1$, 其中 $\mathfrak{h}$ 是 H 的李代数.

证明　设 $\dim \mathfrak{h}_1 = d, \{X_1, \cdots, X_d\}$ 是李代数 $\mathfrak{h}_1$ 的一个基. 现定义 G 上的分布 $\mathfrak{D}$ 如下: 对每一个 $\sigma \in G$, 令 $\mathfrak{D}(\sigma) = \{X(\sigma) | X \in \mathfrak{h}_1\}$, 显然 $\mathfrak{D}$ 是 G 上的 d 维分布. 因为分布 $\mathfrak{D}$ 在整体上是由 $\mathfrak{h}_1$ 的基 $X_1, \cdots, X_d$ 张成的, 所以 $\mathfrak{D}$ 是光滑的.

断言: $\mathfrak{D}$ 是对合分布. 设 X, Y 是属于 $\mathfrak{D}$ 的光滑向量场, 则有 G 上的 C^∞ 函数 $\{a_i\}$ 和 $\{b_i\}$ 使得 $X = \sum_{i=1}^{d} a_i X_i$ 和 $Y = \sum_{i=1}^{d} b_i X_i$, 因而

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^{d} \{a_i b_j [X_i, X_j] + a_i X_i(b_j) X_j - b_j X_j(a_i) X_i\}.$$

由于 $\mathfrak{h}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数, 所以向量场 $[X, Y]$ 属于 $\mathfrak{D}$. 断言成立.

由 $\mathfrak{D}$ 是李群 G 上的一个对合光滑分布这一事实使我们可应用定理 2.3.3, 现令 (H, φ) 为 $\mathfrak{D}$ 的经过单位元 e 的极大连通积分流形, 设 $\sigma \in \varphi(H)$. 因为 $\mathfrak{D}$ 在左平移下不变, 所以 $(H, l_{\sigma^{-1}} \circ \varphi)$ 也是 $\mathfrak{D}$ 的经过 e 的积分流形. 据极大性有 $l_{\sigma^{-1}} \circ \varphi(H) \subset \varphi(H)$. 因此当 $\sigma, \tau \in \varphi(H)$ 时, $\sigma^{-1}\tau \in \varphi(H)$, 这说明 $\varphi(H)$ 是 G 的一个抽象子群. 由此又可以诱导出 H 上的一个群结构使得 $\varphi: H \to G$ 是抽象群的同态. 余下验证映射 $\alpha: H \times H \to H, (\sigma, \tau) \longmapsto \alpha(\sigma, \tau) = \sigma\tau^{-1}$ 是 C^∞ 的. 因映射 $\beta: H \times H \to G, (\sigma, \tau) \longmapsto \varphi(\sigma)\varphi(\tau)^{-1}$ 是 C^∞ 的. 再有 (H, φ) 是 G 上的对合分布

$\mathfrak{D}$ 的积分流形, 所以由习题 2 第 18 题可知, 存在唯一映射 $\alpha : H \times H \to H$ 使得 $\varphi \circ \alpha = \beta$, 并且 α 是 C^∞ 的. 这样一来, H 是李群, 并且 (H,φ) 是 G 的一个连通李子群. 又 $\mathfrak{h}$ 是 H 的李代数, 显然有 $\mathrm{d}\varphi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}_1$.

最后证唯一性. 假设 (K,ψ) 是 G 的另一个连通李子群并且满足 $\mathrm{d}\psi(\mathfrak{k}) = \mathfrak{h}_1$, 那么 (K,ψ) 必定是 $\mathfrak{D}$ 的经过 e 的一个积分流形. 由 (H,φ) 的极大性知, $\psi(K) \subset \varphi(H)$. 再一次利用习题 2 第 18 题, 令 $\gamma : K \to H$ 是使得 $\varphi \circ \gamma = \psi$ 的唯一映射, 那么 γ 是 C^∞ 的.

由于 $\psi : K \to G$ 和 $\varphi : H \to G$ 都是李群同态, 而且是单的, 因此 $\gamma : K \to H$ 是李群的单同态. 而 γ 在单位元的一个邻域上是一个微分同胚. 据推论 3.1.1, 连通李群可由任意一个单位邻域生成, 因此 γ 是满射, 这样一来 $\gamma : K \to H$ 是一个李群同构, 李子群 (K,ψ) 和 (H,φ) 是等价的. 唯一性得证.

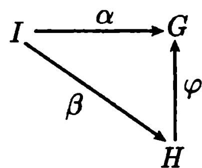


推论 3.3.2 一个李群的连通李子群与它的李代数的子代数之间存在一一对应.

推论 3.3.3 设 (H,φ) 是李群 G 的一个李子群, H_0 是 H 的一个连通分支, 则 $(H_0, \varphi|_{H_0})$ 是 G 上由 $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathrm{d}\varphi(\mathfrak{h})$ 决定的对合分布的极大连通积分流形.

命题 3.3.3 设 (H,φ) 是李群 G 的李子群, H 和 G 的李代数分别为 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{g}$. 如果 $X \in \mathrm{d}\varphi(\mathfrak{h})$, 那么对所有 $t, \exp tX \in \varphi(H)$. 反之, 若 $\exp tX \in \varphi(H)$ 对于某个开区间中的 t 成立, 则 $X \in \mathrm{d}\varphi(\mathfrak{h})$.

证明 若 $X \in \mathrm{d}\varphi(\mathfrak{h})$, 则由定理 3.3.2 可知, $\exp tX \in \varphi(H)$ 对所有 t 皆成立.



假若 $\exp tX \in \varphi(H)$ 对某个开区间 I 中的 t 成立. 令映射 $\alpha : I \to G$ 定义为 $\alpha(t) = \exp tX$, 则 $\alpha(I) \subset \varphi(H)$. 由于 φ 是单射, 必存在从 I 到 H 的唯一一个映射 β, 使得 $\varphi \circ \beta = \alpha$. 又 β 是 C^∞ 映射 (请读者补证). 取 $t_0 \in I$, 令 $\widetilde{X}$ 是由 $\dot{\beta}(t_0)$ 决定的 H 上的左不变向量场, 则 $\mathrm{d}\varphi(\widetilde{X}) = X$.

下面介绍李群的闭子群. 所谓李群 G 的闭子群 A 指的是 A 既是群 G 的抽象子群, 又是 G 作为拓扑空间的闭子集. 那么自然会问: A 能否成为李群呢? 并且 (A,i)(这里 $i : A \to G$ 表示包含映射) 是否成为 G 的李子群呢?

定理 3.3.5 设 G 为李群, A 为 G 的闭子群, 则 A 有唯一的一个流形结构使得 A 成为一个李群, 并且 (A,i) 是 G 的闭李子群, 其中包含映射: $i : A \to G$ 是嵌入.

因为 i 是嵌入, A 上的这个流形结构中的拓扑必然是相对拓扑. 在考虑这种形式的李子群时, 可不提包含映射而直接说 G 的李子群 A. 本定理证明颇繁, 有兴趣的读者请参看文献 [15].

命题 3.3.4 设 $\psi : G \to K$ 是一个李群同态. 令 $A = \mathrm{Ker}\psi, \mathfrak{a} = \mathrm{Kerd}\psi$, 则 A 是 G 的一个闭李子群并且 A 的李代数为 $\mathfrak{a}$.

证明 A 显然是 G 的一个抽象闭子群. 根据定理 3.3.5, A 还是 G 的一个闭李子群. 设 $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数. 如果 $X \in \mathfrak{g}$, 那么由命题 3.3.3, 并令 $H = A, \varphi =$ 包含映射 i, 我们有

$$\begin{aligned} X\text{属于}A\text{的李代数} &\Leftrightarrow \exp tX \in A, &&\text{对所有}t \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \psi(\exp tX) = e, &&\text{对所有}t \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \exp(t\mathrm{d}\psi(X)) = e, &&\text{对所有}t \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{d}\psi(X) = 0 \\ &\Leftrightarrow X \in \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

3.3.3 典型线性群及其李代数

本段讨论 $Gl(n,\mathbb{C})$ 的各种子群, 称之为典型线性群, 它们是一类重要的李群, 而且在力学和物理学中有着广泛应用.

为便于讨论, 先介绍几个记号. 设 $A \in gl(n,\mathbb{C})$, A 的转置记为 A^{T}, A 的复共轭记为 $\overline{A}$, 它是指 A 的元素取复共轭所得的矩阵. 用 I 表 n 阶单位矩阵. 例如 $GL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) | \overline{A} = A\}$, 它是 $GL(n,\mathbb{C})$ 的闭子群, 依定理 3.3.5, $GL(n,\mathbb{R})$ 是 $GL(n,\mathbb{C})$ 的闭李子群. 下面将 $GL(n,\mathbb{C})$ 以及 $GL(n,\mathbb{R})$ 的部分子群列举如下:

(a) 酉群 $U(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) | \overline{A^{\mathrm{T}}} \cdot A = I\}$

(b) 复特殊线性群 $SL(n,\mathbb{C}) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) | \det A = 1\}$

(c) 复正交群 $O(n,\mathbb{C}) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) | A^{\mathrm{T}} \cdot A = I\}$

(d) 特殊酉群 $SU(n) = U(n) \cap SL(n,\mathbb{C})$

(e) 复特殊正交群 $SO(n,\mathbb{C}) = SL(n,\mathbb{C}) \cap O(n,\mathbb{C})$

(f) (实) 特殊线性群 $SL(n,\mathbb{R}) = SL(n,\mathbb{C}) \cap GL(n,\mathbb{R})$

(g) (实) 正交群 $O(n) = U(n) \cap GL(n,\mathbb{R})$

(h) (实) 特殊正交群 $SO(n) = O(n) \cap SL(n,\mathbb{R})$

前五个群中的每一个都是 $GL(n,\mathbb{C})$ 的抽象子群和闭子集, 后三个群中的每一个都是 $GL(n,\mathbb{R})$(因而也是 $GL(n,\mathbb{C})$) 的抽象子群和闭子集. 根据定理 3.3.5, 前五个群均为 $GL(n,\mathbb{C})$ 的闭李子群, 后三个群是 $GL(n,\mathbb{R})$(以及 $GL(n,\mathbb{C})$) 的闭李子群.

由此可见, 定理 3.3.5 提供了判断李群的子群是李子群的一个方便准则. 因为

$$\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}, \overline{\mathrm{e}^A} = \mathrm{e}^{\bar{A}}, \quad (\mathrm{e}^A)^{\mathrm{T}} = \mathrm{e}^{A^{\mathrm{T}}}.$$

所以不难推出上面各个李群的李代数分别是

(a)′ $u(n) = \{A \in gl(n,\mathbb{C}) | \bar{A} + A^{\mathrm{T}} = 0\}$, 由反埃尔米特 (Hermite) 矩阵组成,

(b)′ $sl(n,\mathbb{C}) = \{A \in gl(n,\mathbb{C}) | \mathrm{tr}A = 0\}$, 由零迹复矩阵组成,

(c)′ $o(n,\mathbb{C}) = \{A \in gl(n,\mathbb{C}) | A + A^{\mathrm{T}} = 0\}$, 由复反对称矩阵组成,

(d)′ $su(n) = \{A \in gl(n,\mathbb{C}) | \bar{A} + A^{\mathrm{T}} = 0, \mathrm{tr}A = 0\}$, 由零迹的反埃尔米特矩阵组成,

(e)′ $so(n,\mathbb{C}) = o(n,\mathbb{C})$,

(f)′ $sl(n,\mathbb{R}) = \{A \in gl(n,\mathbb{R}) | \mathrm{tr}A = 0\}$, 由零迹实矩阵组成,

(g)′ $o(n) = \{A \in gl(n,\mathbb{R}) | A + A^{\mathrm{T}} = 0\}$, 由实反对称矩阵组成,

(h)′ $so(n) = o(n)$.

这些李群的维数容易从它们的李代数算出: $U(n)$ 是 n^2 维的, $SL(n,\mathbb{C})$ 是 $2n^2-2$ 维的, $O(n,\mathbb{C})$ 与 $SO(n,\mathbb{C})$ 都是 $n(n-1)$ 维的, $SU(n)$ 是 n^2-1 维的, $SL(n,\mathbb{R})$ 是 n^2-1 维的, $O(n)$ 和 $SO(n)$ 都是 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 维的.

典型线性群还包括辛群, 洛伦兹 (Lorentz) 群及庞加莱 (Poincaré) 群等, 不再赘述.

例 1 证明指数映射 $\exp : sl(2,\mathbb{R}) \to SL(2,\mathbb{R})$ 不是满射.

证明 李代数 $sl(2,\mathbb{R})$ 由零迹 2×2 实矩阵组成. 设 $A \in sl(2,\mathbb{R})$, 则 A 可表为

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

A 的特征方程是 $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - (a^2+bc) = 0$. 记 $d = \sqrt{|a^2+bc|}$, 则 A 的特征根为 $\pm d$ 或 $\pm\sqrt{-1}d$, 于是 e^A 的特征根或为一对互为倒数的正数或为一对互为共轭的复数. 这样一来, $SL(2,\mathbb{R})$ 中特征根为两个不同负数的矩阵, 例如

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

不会是任何属于 $sl(2,\mathbb{R})$ 的矩阵在指数映射下的像.

3.4 伴随表示

本节讨论一种特殊的但十分有用的李群同态, 称之为李群的伴随表示. 李群的

表示理论发展迅速, 内容非常丰富. 我们仅就李群的一种表示即伴随表示作简单介绍.

定义 3.4.1　设 $\varphi: G \to H$ 为李群的同态, 其中 $H = \mathrm{Aut}(V)$(V 为实向量空间), 或 $H = GL(n, \mathbb{R})$, 则同态 φ 称为李群 G 的一个 **(实)表示**.

若 V 为复向量空间, $H = \mathrm{Aut}(V)$ 或 $GL(n, \mathbb{C})$, 则同态 $\varphi: G \to H$ 称为李群 G 的一个**复表示**.

定义 3.4.2　设 $\psi: \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 为李代数同态, 其中 $\mathfrak{h} = \mathrm{End}(V)$, V 为实 (或复) 向量空间, 或者 $\mathfrak{h} = gl(n, \mathbb{R})$(或 $gl(n, \mathbb{C})$), 则把同态 ψ 称为李代数 $\mathfrak{g}$ 的 **(实)表示**(或**复表示**).

例 1　设李群 G 的李代数为 $\mathfrak{g}$, V 为向量空间. 如果 $\varphi: G \to \mathrm{Aut}(V)$ 是 G 的一个表示并且 $X \in \mathfrak{g}$, 那么由 3.2 节中 (4) 式及定理 3.3.2 可得

$$\varphi(\exp X) = 1 + \mathrm{d}\varphi(X) + \frac{[\mathrm{d}\varphi(X)]^2}{2!} + \cdots, \tag{1}$$

并且

$$\mathrm{d}\varphi(X) = \lim_{t\to 0} \frac{\exp(t\mathrm{d}\varphi(X)) - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(\exp tX) - 1}{t} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (\varphi(\exp tX)). \tag{2}$$

对于李群 G, 定义映射 $a: G \times G \to G$ 如下: 对任意 $\sigma, \tau \in G$, 规定

$$a(\sigma, \tau) = \sigma\tau\sigma^{-1},$$

并令 $a_\sigma: G \to G$ 定义为 $a_\sigma(\tau) = a(\sigma, \tau)$, 它具有如下性质:

(i) 对每一 $\sigma \in G$, $a_\sigma = l_\sigma \circ r_{\sigma^{-1}} = r_{\sigma^{-1}} \circ l_\sigma$, 说明 a_σ 是 G 上的一个微分同胚.

(ii) 对任意 $\tau_1, \tau_2 \in G, a_\sigma(\tau_1 \cdot \tau_2) = (\sigma\tau_1\sigma^{-1}) \cdot (\sigma\tau_2\sigma^{-1}) = a_\sigma(\tau_1) \cdot a_\sigma(\tau_2)$, 说明 $a_\sigma: G \to G$ 是一个群同态.

由 (i), (ii) 知, 对每一 $\sigma \in G, a_\sigma: G \to G$ 是李群 G 的一个自同构, 称为 G 的一个**内自同构**.

(iii) 对每一 $\sigma \in G$, 单位元 e 是内自同构 a_σ 的不动点.

断言　设映射 $\psi: G \to \mathrm{Aut}(T_eG)$ 定义为 $\psi(\sigma) = \mathrm{d}a_\sigma|_{T_eG}$, 则 ψ 是 G 的一个表示.

证明　首先证明 ψ 是抽象群的同态. 任取 $\sigma_1, \sigma_2 \in G$, 有

$$a_{\sigma_1} \circ a_{\sigma_2} = (l_{\sigma_1} \circ r_{\sigma_1^{-1}}) \circ (l_{\sigma_2} \circ r_{\sigma_2^{-1}}) = l_{\sigma_1} \circ l_{\sigma_2} \circ r_{\sigma_1^{-1}} \circ r_{\sigma_2^{-1}} = l_{\sigma_1\sigma_2} \circ r_{(\sigma_1\sigma_2)^{-1}} = a_{\sigma_1\sigma_2},$$

因此

$$\psi(\sigma_1\sigma_2) = \mathrm{d}a_{\sigma_1\sigma_2}|_{T_eG} = \mathrm{d}(a_{\sigma_1} \circ a_{\sigma_2})|_{T_eG} = (\mathrm{d}a_{\sigma_1}|_{T_eG}) \circ (\mathrm{d}a_{\sigma_2}|_{T_eG}) = \psi(\sigma_1) \circ \psi(\sigma_2).$$

其次证明 ψ 是 C^∞ 的. 这只要证明 ψ 与 $\operatorname{Aut}(T_eG)$ 上的任意坐标函数的复合是 C^∞ 的. 而 $\operatorname{Aut}(T_eG)$ 上的坐标系可以通过选取 T_eG 的一个基, 然后利用这个基把 $\operatorname{Aut}(T_eG)$ 的成员与非奇异矩阵等同而得到, 并且与 $\operatorname{Aut}(T_eG)$ 的一成员相对应的矩阵也可以通过将该成员作用于 T_eG 的基, 然后再用对偶基作用而得到, 因此只需证明: 若 $v_0 \in T_eG, \alpha \in T_e^*G$, 则

$$\sigma \longmapsto \alpha(\mathrm{d}a_\sigma(v_0)) \tag{3}$$

是 G 上的一个 C^∞ 函数. 为此, 只需证明

$$\sigma \longmapsto \mathrm{d}a_\sigma(v_0) \tag{4}$$

是 G 到 T_eG 中的一个 C^∞ 映射. 或者等价地, 证明 (4) 是 G 到 G 的切丛 $T(G)$ 中的一个 C^∞ 映射. 但是 (4) 恰好是下列 C^∞ 映射的复合:

$$G \to T(G) \times T(G) \to T(G \times G) \to T(G),$$

其中第一个映射为 $\sigma \longmapsto ((\sigma,0),(e,v_0))$, 第二个映射是从 $T(G)\times T(G)$ 到 $T(G\times G)$ 的标准微分同胚: $((\sigma,0),(e,v_0)) \longmapsto ((\sigma,e)(0,v_0))$, 第三个映射是 $\mathrm{d}a$. 于是 ψ 是 C^∞ 的.

定义 3.4.3 设 G 为李群, 其李代数为 $\mathfrak{g}$. 对每一 $\sigma \in G, a_\sigma : G \to G, a_\sigma(\tau) = \sigma\tau\sigma^{-1}$ 为 G 的内自同构, 单位元 e 是 a_σ 的不动点. 因此由断言, 映射

$$\sigma \longmapsto \mathrm{d}a_\sigma|_{T_eG\cong\mathfrak{g}}$$

是 G 到 $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ 的一个表示, 称为李群 G 的**伴随表示**, 记为

$$Ad : G \to \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}),$$

并将伴随表示的微分记为 $a\mathrm{d}$, 即 $\mathrm{d}(A\mathrm{d}) = a\mathrm{d} : \mathfrak{g} \to \operatorname{End}(\mathfrak{g})$.

此外, 将 $A\mathrm{d}(\sigma)$ 记为 $A\mathrm{d}_\sigma, a\mathrm{d}(X)$ 记为 $a\mathrm{d}_X$. 据定理 3.3.2, 有下列两个交换图表

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{Ad} & \operatorname{Aut}(\mathfrak{g}) \\ \uparrow{\scriptstyle \exp} & & \uparrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow[ad]{} & \operatorname{End}(\mathfrak{g}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{a_\sigma} & G \\ \uparrow{\scriptstyle \exp} & & \uparrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow[Ad_\sigma]{} & \mathfrak{g} \end{array}$$

换言之, 有

$$Ad(\exp tX) = \exp(tad(X)) \tag{5}$$

和

$$\exp tAd_\sigma(X) = \sigma(\exp tX)\sigma^{-1}. \tag{6}$$

定理 3.4.1 设 G 是一个李群, 以 $\mathfrak{g}$ 为李代数, $X, Y \in \mathfrak{g}$, 则

$$ad_X Y = [X, Y]. \tag{7}$$

证明 因为 $ad = \mathrm{d}(Ad), Ad_\sigma = \mathrm{d}a_\sigma$, 因此由 (2) 式得

$$ad_X Y = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} Ad(\exp tX)\right) Y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} Ad_{\exp tX}(Y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathrm{d}(a_{\exp tX})(Y),$$

而 $a_{\exp tX} = r_{\exp(-tX)} \circ l_{\exp tX}$, 并且由推论 3.2.1 知, 由左不变向量场 X 决定的单参数 C^∞ 变换群 $\{h_t\}$ 可如下决定: $h_t = r_{\exp tX}$, 于是

$$\begin{aligned} ad_X Y(e) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathrm{d}(r_{\exp(-tX)})(\mathrm{d}(l_{\exp tX}))(Y(e)) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathrm{d}(r_{\exp(-tX)})(Y_{\exp tX}) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \mathrm{d}(h_{-t})(Y_{h_t(e)}) \\ &= (L_x Y)(e) = [X, Y](e). \end{aligned} \tag{8}$$

其中第 4 个等式依据李导数定义 (见 2.6 节 (1) 式), 最后一个等式根据定理 2.6.1. 因为 $ad_X Y$ 和 $[X, Y]$ 都是左不变的, 所以从 (8) 式直接得出 (7) 式.

定义 3.4.4 设李群 G 的李代数为 $\mathfrak{g}$.

(i) G 的中心 $C(G) = \{\sigma \in G | \sigma\tau = \tau\sigma$ 对所有 $\tau \in G$ 成立 $\}$,

(ii) $\mathfrak{g}$ 的中心 $C(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} | [X, Y] = 0$ 对所有 $Y \in \mathfrak{g}\}$.

易见 $C(G)$ 是 G 的正规子群, $C(\mathfrak{g})$ 是 G 的伴随表示的微分 ad 的核, 即 $C(\mathfrak{g}) = \mathrm{Ker}(ad)$, 它是 $\mathfrak{g}$ 的一个理想.

命题 3.4.1 设 G 是一个连通李群, 则 G 的中心是 G 的伴随表示的核, 即 $C(G) = \mathrm{Ker}(Ad)$.

证明 设 $\sigma \in C(G)$, $X \in \mathfrak{g}$, 则由 (6) 式可知, 对所有 $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp tX = \sigma(\exp tX)\sigma^{-1} = \exp tAd_\sigma(X), \tag{9}$$

因此 $X = Ad_\sigma(X)$, 这说明 Ad_σ 是 $\mathfrak{g}$ 上的恒同映射, 故 $\sigma \in \mathrm{Ker}(Ad)$.

反之, 设 $\sigma \in \mathrm{Ker}(Ad)$, 则 (9) 式仍然成立, 于是在 G 中 σ 可与单位元 e 的一个邻域内的每一个元素交换. 而 G 是连通的, 据推论 3.1.1, G 可由单位邻域生成, 所以 σ 可与 G 的所有元素交换, 即 $\sigma \in C(G)$.

由该命题并结合命题 3.3.4, 立即有下列推论.

推论 3.4.1 设 G 是一个连通李群, 则 G 的中心 $C(G)$ 是 G 的一个闭李子群, 并且它的李代数就是 $\mathfrak{g}$ 的中心 $C(\mathfrak{g})$.

推论 3.4.2 一个连通李群 G 是交换群当且仅当它的李代数 $\mathfrak{g}$ 是交换的.

例 2 设 $\mathfrak{g}$ 是李群 G 的李代数, $X, Y \in \mathfrak{g}$, 则

$$ad[X,Y] = [adX, adY].$$

证明 任取 $Z \in \mathfrak{g}$, 有

$$\begin{aligned} ad[X,Y](Z) &= [[X,Y],Z] = -[[Y,Z],X] - [[Z,X],Y] \\ &= -[adY(Z),X] + [adX(Z),Y] = adX(adY(Z)) - adY(adX(Z)) \\ &= [adX, adY](Z) \end{aligned}$$

因 $Z \in \mathfrak{g}$ 是任取的, 故作为 $\mathfrak{g}$ 上的线性变换, 结论成立.

定理 3.4.2 设 G 是连通李群, $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数. 假若 A 是 G 的连通李子群, 那么 A 是 G 的正规子群当且仅当 A 的李代数 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想.

证明 $\Leftarrow$ 设 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 取 $Y \in \mathfrak{a}$, $X \in \mathfrak{g}$. 令 $\sigma = \exp X$. 由 (5) 式及 (6) 式可得

$$\begin{aligned} \sigma(\exp Y)\sigma^{-1} &= \exp Ad_\sigma(Y) = \exp(Ad(\exp X)(Y)) = \exp((\exp ad_X)(Y)) \\ &= \exp(Y + ad(X)(Y) + \frac{1}{2!}(ad(X))^2(Y) + \cdots) \\ &= \exp(Y + [X,Y] + \frac{1}{2!}(ad(X))^2(Y) + \cdots), \end{aligned}$$

其中第 4 个等式依据 3.2 节 (4) 式. 因假定 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 故 $Y + [X,Y] + \frac{1}{2!}(ad(X))^2(Y) + \cdots$ 收敛于 $\mathfrak{a}$ 中某个元, 于是

$$\sigma(\exp Y)\sigma^{-1} \in A. \tag{10}$$

又 G, A 均连通, 连通李群可由单位邻域生成, 而定理 3.2.2 告诉我们, 指数映射给出了李代数中 0 的一个邻域到相应李群中单位元 e 的一个邻域上的微分同胚, 因此 A 可由形如 $\exp Y$ 的元素生成, G 由形如 $\exp X$ 的元素生成, 这与 (10) 式一起导出 A 是 G 的正规子群.

$\Rightarrow$ 假设 A 是 G 的正规子群. 设 $s, t \in \mathbb{R}$, $Y \in \mathfrak{a}$, $X \in \mathfrak{g}$ 且令 $\sigma = \exp tX$, 则

$$\sigma(\exp sY)\sigma^{-1} = \exp Ad_\sigma(sY) = \exp s((\exp ad_{tX})(Y)) \in A.$$

于是由命题 3.3.3 得知, 对所有 $t\in\mathbb{R}$, $(\exp ad_{tX})(Y)\in\mathfrak{a}$. 又

$$\begin{aligned}(\exp ad_{tX})(Y)&=(\exp t(ad_X))(Y)\\&=Y+t[X,Y]+\frac{t^2}{2!}[X,[X,Y]]+\cdots,\end{aligned}$$

它是 $\mathfrak{a}$ 中一条光滑曲线, 且在 $t=0$ 处的切向量为 $[X,Y]$, 从而 $[X,Y]\in\mathfrak{a}$. 这样就证明了 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个理想.

3.5 李群在微分流形上的作用

在 2.2 节讨论流形上的流时, 曾引入流形上的单参数 C^∞ 变换群, 即 $\mathbb{R}$ 在流形 M 上的作用. 这里 $\mathbb{R}$ 实际上是实数关于加法所构成的 1 维李群. 将 $\mathbb{R}$ 用一般李群 G 代替, 本节考虑李群 G 在微分流形 M 上的作用, 即所谓的李氏变换群. 众所周知, 变换群在几何学中是十分重要的. 由于考虑的变换群不同, 就有欧氏几何、仿射几何和射影几何等各种不同的几何学. 而李氏变换群则是上述典型变换群的推广, 对近代微分几何产生重要的影响.

定义 3.5.1 设 M 为微分流形, G 为李群. 如果 C^∞ 映射 $\Phi:G\times M\to M$ 满足如下条件: 对任意 $p\in M$, σ, $\tau\in G$, 有

(i) $\Phi(e,p)=p$, 其中 e 为 G 的单位元,

(ii) $\Phi(\tau,\Phi(\sigma,p))=\Phi(\tau\sigma,p)$.

那么称 G 从左边光滑地作用于 M.

对任意 $\sigma\in G$, 令 $\Phi_\sigma:M\to M$ 定义为 $\Phi_\sigma(p)=\Phi(\sigma,p)$, 则 (i), (ii) 可写为

(i)$'$ $\Phi_e=id_M$, (ii)$'$ $\Phi_\tau\circ\Phi_\sigma=\Phi_{\tau\sigma}$,

于是有 $\Phi_{\sigma^{-1}}=(\Phi_\sigma)^{-1}$, 这说明每一个 $\Phi_\sigma:M\to M$ 是一个微分同胚. 将 M 上的微分同胚所成之集记为 $\mathrm{Diff}(M)$, 在映射复合运算下显然构成一个群, 因此 G 从左边作用于 M 时, 称 G 是左作用在 M 上的**李氏变换群**.

假若 $\varphi:H\to G$ 是从李群 H 到 G 的同态, 不难看出 $\psi:H\times M\to M,(\tau,p)\mapsto\psi(\tau,p)=\Phi(\varphi(\tau),p)$ 是李群 H 在 M 上的一个左作用.

类似地, 可以定义李群 G 在光滑流形 M 上的右作用 (请读者补述), 此时也说 G 是右作用于 M 的李氏变换群.

假设 $\Phi:G\times M\to M$ 是 G 在 M 上的一个左作用, 记 $\Phi(\sigma,p)=\sigma\cdot p$. 取定 $p\in M$, 令 $\alpha_p:G\to M$ 定义为 $\alpha_p(\sigma)=\sigma\cdot p$, 显然 α_p 是 C^∞ 映射. 再令

(i) G 中的子集 $G_p=\{\sigma\in G|\sigma\cdot p=p\}$, 它称为在点 p 的**迷向子群**.

(ii) M 中的子集 $M_p=\{\sigma\cdot p|\sigma\in G\}$, 它称为经过点 p 的**轨道**.

命题 3.5.1 设李群 G 从左边光滑地作用于流形 M, 则

(i) 对于每一 $p \in M$, $\alpha_p : G \to M$ 是一个具有常秩的光滑映射,

(ii) 对每一 $p \in M$, G_p 是 G 的闭子群,

(iii) 若 $q = \sigma_0 \cdot p$, 则 $G_q = \sigma_0 G_p \sigma_0^{-1}$,

(iv) M 是一些互不相交的轨道之并, 即

$$M = \bigcup_{\alpha} M_{p_\alpha},$$

并且当 $M_{p_\alpha} \neq M_{p_\beta}$ 时, $M_{p_\alpha} \bigcap M_{p_\beta} = \varnothing$.

证明 (i) 因为对任意 $\sigma \in G$, 有 $\Phi_\sigma \circ \alpha_p = \alpha_p \circ l_\sigma$, 所以 $(\mathrm{d}\Phi_\sigma)_p \circ (\mathrm{d}\alpha_p)_e = (\mathrm{d}\alpha_p)_\sigma \circ (\mathrm{d}l_\sigma)_e$. 而 $\Phi_\sigma : M \to M$ 及 $l_\sigma : G \to G$ 都是微分同胚, 因此 α_p 在点 $\sigma \in G$ 的秩等于 α_p 在单位元 $e \in G$ 的秩. 又 σ 是任取的, 这说明 C^∞ 映射 α_p 具有常秩.

(ii) 显然 G_p 是 G 的子群. 因映射 $\alpha_p : G \to M$ 连续, 又 $\{p\}$ 是 M 中的闭子集, 故 $G_p = \alpha_p^{-1}(\{p\})$ 是 G 中闭子集从而是闭子群.

(iii) $q = \sigma_0 \cdot p$, $\sigma_0 \in G$ 说明 $q \in M_p$. 显然 $\sigma \in G_q$ 当且仅当 $\sigma \cdot q = q$ 即 $\sigma \cdot (\sigma_0 \cdot p) = \sigma_0 \cdot p$, 也就是说 $\sigma_0^{-1}\sigma\sigma_0 \in G_p$, 于是 $G_q \subset \sigma_0 G_p \sigma_0^{-1}$. 另一方面, $\sigma_0 G_p \sigma_0^{-1} \subset G_q$(留作练习), 故 (iii) 成立.

(iv) 在 M 中定义关系 $\sim$: $p \sim q$ 是指存在 $\sigma \in G$ 使得 $q = \sigma \cdot p$. 容易验证 $\sim$ 是一个等价关系, 并且 p 所在的等价类为 M_p, 故 (iv) 成立.

注 1) 设 α_p 的秩为 k, 由习题 1 第 28 题知, G 在点 p 处的迷向子群 $G_p = \alpha_p^{-1}(\{p\})$ 是 G 中余维数为 k 的正则子流形, 并且 $T_e G_p = \mathrm{Ker}(\mathrm{d}\alpha_p)_e$. 又由 (ii) 及定理 3.3.5, 我们可得出 G_p 是 G 中余维数为 k 的闭李子群.

2) 由 (iii) 可进一步推出: $q \in M_p$ 当且仅当 G_p 与 G_q 共轭, 从而属于同一条轨道的任意两点的迷向子群必共轭.

定义 3.5.2 设 G 是左作用于流形 M 上的李氏变换群. 若对 G 中任意非单位元 σ, 都有 M 中一点 p 使得 $\sigma \cdot p \neq p$, 则称 G 在 M 上的作用是**有效的**.

换言之, 如果对所有 $p \in M$, $\sigma \cdot p = p$ 必有 $\sigma = e$, 那么称 G 在 M 上的作用是有效的.

定义 3.5.3 设 G 是左作用于流形 M 上的李氏变换群. 如果对 M 中的任意两点 p 和 q, 在 G 中必存在一个 σ 使得 $q = \sigma \cdot p$, 那么说 G 在 M 上的作用是**可迁的**.

微分流形 M 叫做**齐性空间**, 如果存在李群 G 可迁地左作用于 M.

例 1 设 $\varphi : GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 定义为 $y = \varphi(A, x) = Ax$, 即

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

显然李群 $GL(n,\mathbb{R})$ 从左方光滑地作用在流形 $\mathbb{R}^n$ 上.

设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的规范正交基, $(e_1,e_2,\cdots,e_n)=I_n$(单位矩阵). 如果对每一 $x\in\mathbb{R}^n$, 有 $Ax=x$, 则 $A=AI_n=(Ae_1,Ae_2,\cdots,Ae_n)=(e_1,\cdots,e_n)=I_n$, 这说明 $GL(n,\mathbb{R})$ 从左边有效作用于 $\mathbb{R}^n$. 但不存在 $A\in GL(n,\mathbb{R})$ 使得 $A\cdot 0=e_1$, 故 $GL(n,\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的作用不是可迁的. 这表示 $\mathbb{R}^n$ 关于群 $GL(n,\mathbb{R})$ 不是齐性空间.

例 2　在 3.1 节例 6 中曾讨论过 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射运动群, 现记为 $G=GL(n,\mathbb{R})\times\mathbb{R}^n$, 它是李群. 令 $\psi:G\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 定义为 $y=\psi((A,a),x)=(A,a)\cdot x=Ax+a$, 其中 $A\in GL(n,\mathbb{R}),a\in\mathbb{R}^n$. 显然李群 $G=GL(n,\mathbb{R})\times\mathbb{R}^n$ 从左方光滑地作用在 $\mathbb{R}^n$ 上.

如果对每一 $x\in\mathbb{R}^n$, 有 $(A,a)\cdot x=Ax+a=x$, 则 $a=A\cdot 0+a=0$. 并且类似于例 1 那样可证明 $A=I_n$, 因此 $(A,a)=(I_n,0)$, 它是群 G 的单位元. 这就证明了 G 在 $\mathbb{R}^n$ 上的作用是有效的.

此外, 对任意 $x,y\in\mathbb{R}^n$, 因 $(I_n,y-x)\cdot x=I_nx+(y-x)=y$, 故 G 在 $\mathbb{R}^n$ 上的作用是可迁的, 从而 $\mathbb{R}^n$ 在李群 G 的作用下是齐性空间.

例 3　设 $O(n)$ 为 n 阶正交群, 它是 $GL(n,\mathbb{R})$ 的闭李子群. 又 S^{n-1} 表 $(n-1)$ 维单位球面. 设 $\chi:O(n)\times S^{n-1}\to S^{n-1}$ 定义为 $\chi(A,x)=Ax$, 读者不难验证 $O(n)$ 在 S^{n-1} 上的左作用是有效的. 下面讨论这一作用是否可迁.

首先设 $n\geqslant 2$. 任取 $x,\ y\in S^{n-1}$. 如果 $x\neq y$, 那么在 x 与 y 所张成的 2 维平面内取规范正交基 $\{e_1,e_2\}$, 其中 $e_1=x$, 于是

$$y=\cos\theta\cdot e_1+\sin\theta\cdot e_2.$$

然后将 $\{e_1,e_2\}$ 扩充为 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$, 使之成为 $\mathbb{R}^n$ 中的规范正交基. 令

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & & & \\ \sin\theta & \cos\theta & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1\end{bmatrix},$$

则 $A\in O(n)$ 且 $Ax=y$.

其次当 $n=1$ 时, $S^{n-1}=S^0=\{-1,1\}$, $O(n)=O(1)=\{-1,1\}$, 如果取 $x=-1,\ y=1,\ A=(-1)$ 或 $x=1,\ y=-1,\ A=(-1)$, 则 $Ax=y$.

由上可知, $O(n)$ 在 S^{n-1} 上的作用是可迁的. 从而 S^{n-1} 关于 $O(n)$ 是齐性空间.

命题 3.5.2　设 G 是左作用在光滑流形 M 上的李氏变换群, 则

$$H=\{\sigma\in G|\sigma\cdot p=p\quad 对每一 p\in M\} \tag{1}$$

是 G 的闭正规子群.

证明 显然 H 是 G 的子群. 任取 $\sigma \in H, \tau \in G$ 则对任意 $p \in M$, 有

$$(\tau\sigma\tau^{-1}) \cdot p = (\tau\sigma) \cdot (\tau^{-1} \cdot p) = \tau \cdot (\sigma \cdot (\tau^{-1} \cdot p)) = \tau \cdot (\tau^{-1} \cdot p) = (\tau\tau^{-1}) \cdot p = p,$$

故 $\tau\sigma\tau^{-1} \in H$, 即 H 是 G 的正规子群.

按照 H 的定义, 易见 $H = \bigcap_{P \in M} G_p$. 而每一 G_p 是 G 的闭子集, 因而 H 也是 G 的闭子集. 根据定理 3.3.5, H 是 G 的闭李子群.

现在介绍有关李群的闭子群的又一个重要结果, 以便继续开展讨论.

定理 3.5.1 设 H 是李群 G 的一个闭子群. 令 G/H 是左陪集所成之集 $\{\sigma H | \sigma \in G\}$, $\pi : G \to G/H$, $\pi(\sigma) = \sigma H$ 表示自然投影, 则在 G/H 上存在唯一的一个流形结构, 使得

(i) $\pi : G \to G/H$ 是 C^∞ 映射,

(ii) G/H 在 G 中有局部的光滑截面, 即若 $\sigma H \in G/H$, 则存在 σH 在 G/H 中的一个开邻域 W 和一个 C^∞ 映射 $\mu : W \to G$ 使得 $\pi \circ \mu = id : W \to W$.

定理的证明对于有兴趣的读者将是一个有益的练习, 读者也可参看文献 [15].

定理 3.5.2 设 G 是李群, H 是 G 的一个闭正规子群, 则流形 G/H 连同它的自然群结构组成一个李群.

证明 只需证明由

$$(\sigma H, \tau H) \mapsto \sigma\tau^{-1}H \tag{2}$$

定义的映射 $G/H \times G/H \to G/H$ 是 C^∞ 的就行了. 设 W_σ, W_τ 分别是 σH 和 τH 在 G/H 中的开邻域, $\mu_\sigma : W_\sigma \to G$ 及 $\mu_\tau : W_\tau \to G$ 是局部光滑截面. 那么映射 (2) 局部地表示为下列 C^∞ 映射的复合:

$$\pi \circ \varphi \circ (\mu_\sigma \times \mu_\tau),$$

其中 $\varphi : G \times G \to G$ 定义为 $\varphi(\sigma, \tau) = \sigma\tau^{-1}$.

用李群 G 关于闭正规子群 H 的商群 G/H 代替 G, 可以将李群的非有效作用化为有效作用, 这正是下面的命题所要证明的.

命题 3.5.3 设 G 是左作用于流形 M 上的李氏变换群. 若 G 在 M 上的作用不是有效的, 即命题 3.5.2 中由 (1) 式定义的 $H \neq \{e\}$, 则商李群 G/H 在 M 上的左作用是有效的.

证明 由定理 3.5.2 知, G/H 是李群. 首先需定义 G/H 在 M 上的作用. 对于 $\sigma \in G$, 用 $[\sigma]$ 记左陪集 σH. 定义映射 $F : G/H \times M \to M$ 为 $F([\sigma], p) = \sigma \cdot p$. 为此需说明该定义是合理的, 即与 $[\sigma]$ 的代表的选取无关. 设 $\sigma_1 \in G$ 合于 $[\sigma_1] = [\sigma]$, 因而存在 $\gamma \in H$ 使得 $\sigma_1 = \sigma\gamma$, 于是 $F([\sigma], p) = F([\sigma_1], p) = \sigma_1 \cdot p = \sigma \cdot (\gamma \cdot p) = \sigma \cdot p$.

据定理 3.5.1, 对每一点 $[\sigma]\in G/H$, 存在 $[\sigma]$ 在 G/H 中的开邻域 W 和 C^∞ 映射 $\mu: W\to G$ 使得 $\pi\circ\mu=id: W\to W$, 因此 $F|_{W\times M}$ 能够表示为

$$F([\tau],p)=\mu([\tau])\cdot p,\quad ([\tau],p)\in W\times M,$$

这说明 $F: G/H\times M\to M$ 是 C^∞ 映射. 下面验证 F 满足定义 3.5.1 中条件 (i) 和 (ii):

(i) $F([e],p)=p$, 对每一 $p\in M$,

(ii) 取 $\sigma,\ \tau\in G,\ p\in M$,

$$F([\tau],F([\sigma],p))=F([\tau],\sigma\cdot p)=\tau\cdot(\sigma\cdot p)=(\tau\sigma)\cdot p=F([\tau\sigma],p)=F([\tau][\sigma],p),$$

因此 $F: G/H\times M\to M$ 是李群 G/H 在 M 上的左作用.

最后证明 G/H 在 M 上的左作用是有效的. 假设 $[\sigma]\in G/H$ 使得对任意 $p\in M$, 有 $F([\sigma],p)=p$, 即 $\sigma\cdot p=p$, 则 $\sigma\in H$, 因此 $[\sigma]=[e]$.

定理 3.5.3 设 $\Phi: G\times M\to M$ 是李群 G 在流形 M 上的一个可迁的左作用, $p_0\in M$, 记 G 在点 p_0 的迷向子群为 H, 则 M 与流形 G/H 微分同胚.

证明 由命题 3.5.1 知, H 是 G 的闭子群. 根据定理 3.5.1, G/H 是光滑流形. 定义映射 $\psi: G/H\to M$ 为 $\psi([\sigma])=\Phi_\sigma(p_0)=\sigma\cdot p_0$, 其中 $[\sigma]$ 表示左陪集 σH. 读者不难看出, 映射 ψ 的定义是合理的, 与 $[\sigma]$ 的代表选取无关. 因 G 在 M 上的作用是可迁的, 故对任意的 $q\in M$, 必有 $\sigma\in G$ 使得 $q=\sigma\cdot p_0=\psi([\sigma])$, 这说明映射是满射. 又如果 $\psi([\sigma])=\psi([\tau])$ 即 $\sigma\cdot p_0=\tau\cdot p_0$, 那么 $(\tau^{-1}\sigma)\cdot p_0=p_0$, 这说明 $\tau^{-1}\sigma\in H$, 从而 $\sigma H=\tau H$ 即 $[\sigma]=[\tau]$, 于是 ψ 又是单射.

映射 ψ 是 C^∞ 的, 因为由定理 3.5.1 知, 对每一 $[\sigma]\in G/H$, 存在 $[\sigma]$ 在 G/H 中的开邻域 W 和 C^∞ 映射 $\mu: W\to G$ 使得 $\pi\circ\mu=id: W\to W$, 因此对于 $[\tau]\in W$, 有

$$\psi([\tau])=\mu([\tau])\cdot p_0,$$

这说明 ψ 是 C^∞ 的.

到此, 我们已证明 $\psi: G/H\to M$ 是一个光滑的、单一的在上映射. 如果 $\mathrm{d}\psi$ 的核处处为 0, 那么利用习题 1 第 14 题便可断定 ψ 是一个微分同胚. 首先在 $[e]$ 处考虑, 假定 $X\in T_eG$ 使得

$$(\mathrm{d}\psi)_{[e]}((\mathrm{d}\pi)_e(X))=0, \tag{3}$$

因而

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\psi(\pi(\exp tX)))=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(\exp tX\cdot p_0)=0. \tag{4}$$

而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp tX\cdot p_0)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}(\exp(t+s)X\cdot p_0)$$
$$=(\mathrm{d}l_{\exp tX})_{p_0}\left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}\exp sX\cdot p_0\right),$$

因此由 (4) 式可推出对任意 $t\in\mathbb{R}$, 均有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp tX\cdot p_0)=0,$$

于是

$$\exp tX\cdot p_0=p_0$$

对所有 $t\in\mathbb{R}$ 皆成立. 这意指 $\exp tX\in H$, $X\in T_eH$, $(\mathrm{d}\pi)_e(X)=0$, 于是 $(\mathrm{d}\psi)_{[e]}$: $T_{[e]}(G/H)\to T_{p_0}M$ 的核为 0.

其次, 在任意 $[\sigma](\in G/H)$ 处考虑. 注意对任意 $\sigma\in G$, 有

$$\psi\circ\pi\circ l_\sigma=\Phi_\sigma\circ\psi\circ\pi:G\to M.\tag{5}$$

现假定 X 是 G 上的左不变向量场, 使得

$$(\mathrm{d}\psi)_{[\sigma]}((\mathrm{d}\pi)_\sigma(X(\sigma)))=0.$$

那么由 (5) 式得

$$0=(\mathrm{d}\psi)_{[\sigma]}\circ(\mathrm{d}\pi)_\sigma\circ(\mathrm{d}l_\sigma)_e(X(e))=(\mathrm{d}\Phi_\sigma)_{p_0}\circ(\mathrm{d}\psi)_{[e]}\circ(\mathrm{d}\pi)_e(X(e)).$$

因为 $\Phi_\sigma:M\to M$ 是微分同胚, 所以 $(\mathrm{d}\Phi_\sigma)_{p_0}:T_{p_0}M\to T_{\sigma\cdot p_0}M$ 是线性同构, 这样一来便有 $(\mathrm{d}\psi)_{[e]}\circ((\mathrm{d}\pi)_e(X(e)))=0$, 而由前面的推导知 $(\mathrm{d}\pi)_e(X(e))=0$ 且 $X(e)\in T_eH$. 又对任意 $\sigma\in G$,

$$\pi\circ l_\sigma=l_{[\sigma]}\circ\pi,\tag{6}$$

其中 $l_{[\sigma]}:G/H\to G/H$ 定义为 $l_{[\sigma]}([\tau])=[\sigma][\tau]=[\sigma\tau]$, 它表示李群 G/H 的左平移, 因而是微分同胚. 由 (6) 式可得

$$(\mathrm{d}\pi)_\sigma(X(\sigma))=(\mathrm{d}\pi)_\sigma\circ(\mathrm{d}l_\sigma)_e(X(e))=(\mathrm{d}l_{[\sigma]})_{[e]}\circ(\mathrm{d}\pi)_e(X(e))=0,$$

这便证明了 $(\mathrm{d}\psi)_{[\sigma]}:T_{[\sigma]}(G/H)\to T_{\sigma\cdot p_0}M$ 的核为 0. 依上面所述, 本定理得证.

继续例 3 的讨论. 正交群 $O(n)$ 中具有如下形式

$$A=\begin{pmatrix}\widetilde{A} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

的矩阵之集构成 $O(n)$ 的一个闭子群, 矩阵 $\widetilde{A}$ 恰好是 $O(n-1)$ 中的成员. 通过将 $\widetilde{A}$ 与 A 等同, 把 $O(n-1)$ 视为 $O(n)$ 的闭子群.

断言　$O(n-1)$ 恰好是 $O(n)$ 在 S^{n-1} 上的左作用

$$O(n)\times S^{n-1}\to S^{n-1},\ (A,x)\mapsto Ax$$

在 $e_n\in S^{n-1}$ 处的迷向子群, 其中 $e_n=(\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1\text{个}},1)$.

显然, $O(n-1)$ 的成员保持 e_n 不动. 另一方面, 假定 $A\in O(n)$ 并且 $Ae_n=e_n$. 因 $Ae_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{in}e_i$, 故当 $i<n$ 时, $a_{in}=0$, 并且 $a_{nn}=1$. 而 A 是正交矩阵, $A^{\mathrm{T}}A=I_n$(n 阶单位矩阵), 于是 $\sum\limits_{i}a_{ni}^2=1$. 因 $a_{nn}=1$, 故对于 $i<n$, 必有 $a_{ni}=0$. 从而 $A\in O(n-1)$. 由定理 3.5.3 可知, 映射

$$O(n)/O(n-1)\to S^{n-1},\quad AO(n-1)\mapsto A\cdot e_n$$

是一个微分同胚. 因此球面 S^{n-1} 以一种自然的方式微分同胚于齐性空间 $O(n)/O(n-1)$.

例 4　设 V 是一个 n 维实向量空间, 令 $M_k(V)$ 是 V 的所有 k 维子空间 (称为 k- 平面) 的集合. 选定 V 的一个基 $v_1,\cdots,v_n$. 对 $A\in O(n)$, 令

$$A(v_j)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}v_i,\quad j=1,\cdots,n,$$

则每个矩阵 A 唯一地决定 V 的一个线性变换, 将它仍记为 A. 换言之, 选定基 $v_1,\cdots,v_n$ 后, 每个 $v\in V$ 的坐标组成一个 $n\times 1$ 矩阵, 于是 A 通过矩阵乘法自然地作用在 V 上. 又由于非退化线性变换把 k- 平面映成 k- 平面, 所以得到映射

$$\xi:O(n)\times M_k(V)\to M_k(V).$$

假设 P 和 Q 是 V 中的 k- 平面, 可以证明存在一个 $A\in O(n)$ 使得 $\xi(A,P)=Q$. 现设 P_0 是由基 $v_1,\cdots,v_n$ 的前 k 个向量所张成的 k- 平面, 并令 H 是使 P_0 保持不动的 $O(n)$ 的子集, 则

$$H=\left\{\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}\in O(n)|A\in O(k),\ B\in O(n-k)\right\},$$

因此 H 是 $O(n)$ 的一个闭子群. 将 H 等同于 $O(k)\times O(n-k)$, 定义映射

$$O(n)/[O(k)\times O(n-k)]\to M_k(V),\quad A(O(k)\times O(n-k))\mapsto \xi(A,P_0),$$

易见它是一个单一的在上映射. 通过要求这个映射是微分同胚而使 $M_k(V)$ 成为一个 $k(n-k)$ 维流形, 并且可以验证 $M_k(V)$ 上的这个流形结构不依赖于 V 的基的选取. $M_k(V)$ 叫做 V 中由 k- 平面构作的 Grassmann 流形.

命题 3.5.4 设 H 是李群 G 的闭子群. 若 H 和 G/H 连通, 则 G 连通.

证明 G/H 取商拓扑 (或说粘合拓扑) 是指: U 是 G/H 中的开集当且仅当 $\pi^{-1}(U)$ 是 G 中开集. 这时自然投影 $\pi: G \to G/H$ 必为开映射, 这是因为: 若 W 是 G 中开集, 则

$$\pi^{-1}(\pi(W)) = \bigcup_{h \in H} Wh$$

也是 G 中开集, 因而 $\pi(W)$ 为 G/H 中开集.

现设 G 可表示为非空开子集 U 和 V 的并, 即

$$G = U \bigcup V, \tag{7}$$

则

$$G/H = \pi(G) = \pi(U) \bigcup \pi(V),$$

且 $\pi(U)$ 和 $\pi(V)$ 都是 G/H 中的非空开子集. 因假设 G/H 连通, 故 $\pi(U) \bigcap \pi(V) \neq \varnothing$. 设

$$\sigma H \in \pi(U) \bigcap \pi(V), \tag{8}$$

于是由 (7) 式可得

$$\sigma H = (\sigma H \bigcap U) \bigcup (\sigma H \bigcap V),$$

其中 $\sigma H \bigcap U$ 和 $\sigma H \bigcap V$ 均为 σH 的开子集, 因为 H 具有相对拓扑. 而由 (8) 式知, $\sigma H \bigcap U$ 和 $\sigma H \bigcap V$ 都是非空的. 因假设 H 连通, 又 σH 同胚于 H, 故 σH 必连通. 这样一来, 便有

$$(\sigma H \bigcap U) \bigcap (\sigma H \bigcap V) \neq \varnothing,$$

从而 $U \bigcap V \neq \varnothing$, 这就证明了 G 是连通的.

定理 3.5.4 当 $n \geqslant 1$ 时, 李群 $SO(n)$, $SU(n)$ 和 $U(n)$ 都是连通的, 而 $O(n)$ 具有两个连通分支.

证明 $SO(1)$ 和 $SU(1)$ 都仅由 1×1 单位矩阵组成, 所以是连通的. 而 $U(1) = \{(\lambda) | \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1\}$, 故连通.

当 $n \geqslant 2$ 时, 齐性空间 $SO(n)/SO(n-1)$ 微分同胚于球面 S^{n-1}, 并且球面 S^{2n-1} 既微分同胚于 $U(n)/U(n-1)$, 又可微分同胚于 $SU(n)/SU(n-1)$, 这些结论见本章习题第 24 题与第 25 题. 因此利用命题 3.5.4 并通过使用关于 n 的归纳法便可得到 $SO(n)$, $SU(n)$ 及 $U(n)$ 均连通.

因为 $O(n)$ 中的每一个矩阵的行列式为 1 或 -1, 所以 $O(n)$ 可以写成下列两个不相交的非空连通开子集之并: $O(n) = SO(n) \bigcup A_0SO(n)$, 其中

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

这便证明 $O(n)$ 非连通, 它有两个连通分支.

习　题　3

1. 证明所有非退化上三角实 $n \times n$ 矩阵所成之集在矩阵乘法下构成一个李群.

2. 设 G 是 r 维李群, G_0 是 G 的含有单位元 e 的连通分支, 证明 G_0 是 r 维连通李群.

3. 设 $\{X_1, \cdots, X_r\}$ 是 r 维李群 G 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的基, 证明 G 上的 C^∞ 向量场 X 是左不变的当且仅当它是 $X_i(i = 1, \cdots, r)$ 的常系数线性组合.

4. 给定一组实数 c_{ij}^k, $1 \leqslant i,\ j,\ k \leqslant r$, 它们满足反交换性和 Jacobi 恒等式, 证明必有一个抽象的 r 维李代数以 $\{c_{ij}^k\}$ 为它的结构常数.

5. 设 V 是实 (或复) 向量空间, 证明李群 $\mathrm{Aut}(V)$ 的李代数是 $\mathrm{End}(V)$.

6. 证明命题 3.1.4.

7. 设 Y 是李群 G 的一个向量场. 如果对每一 $\sigma \in G$, Y 与其自身是 r_σ- 相关的, 即 $\mathrm{d}r_\sigma \circ Y = Y \circ r_\sigma$, 这里 r_σ 表示 G 的右平移, 则称 Y 是 G 上的右不变向量场. 证明 G 上右不变向量场的集合在括号积运算下构成一个李代数, 并且作为一个向量空间自然同构于 T_eG.

8. 令 $\varphi: G \to G$ 是由 $\varphi(\sigma) = \sigma^{-1}$ 定义的微分同胚, 证明:

1) 如果 X 是 G 的一个左不变向量场, 那么 $\mathrm{d}\varphi(X)$ 是一个右不变向量场, 它在点 e 的值是 $-X(e)$;

2) $X \mapsto \mathrm{d}\varphi(X)$ 给出 G 上左不变向量场的李代数与 G 上右不变向量场的李代数之间的一个李代数同构.

9. 设 $\{\alpha(t) | t \in \mathbb{R}\}$ 是李群 G 中的单参数子群, $\alpha(0) = e$. 令 X 为对应于 $\dot{\alpha}(0) = X(e)$ 的左不变向量场. 证明: $\alpha: \mathbb{R} \to G$ 是 X 的一条积分曲线.

10. 设 θ 为实数, 求 $\exp\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$.

11. 设 α, β 为实数, 求证

$$\exp\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^\alpha & \dfrac{\beta}{\alpha}(\mathrm{e}^\alpha - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

12. 设 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ 是一个李群中的光滑曲线使得 $\alpha(0) = \beta(0) = e$. 令 $\sigma(t) = \alpha(t)\beta(t)$, 证明 $\dot{\sigma}(0) = \dot{\alpha}(0) + \dot{\beta}(0)$.

提示: 考虑群的乘法映射 $\eta: G\times G\to G$, $\eta(\gamma,\tau)=\gamma\tau$. 设 v, $w\in T_eG$, 证明

$$\mathrm{d}\eta(v,w)=\mathrm{d}\eta((v,0)+(0,w))=v+w.$$

13. 利用指数映射证明: 每一个李群 G 都有一个单位邻域, 它不包含任何不等于 $\{e\}$ 的子群.

14. 设 A, $B\in gl(n,\mathbb{C})$. 证明: 若 $AB=BA$, 则 $\mathrm{e}^{A+B}=\mathrm{e}^A\cdot\mathrm{e}^B$.

15. 设 G, H 是李群, $\varphi: G\to H$ 是李群同态. 举例说明 $\varphi(G)$ 不一定是 H 的李子群.

16. 设 $G=\left\{\left(\begin{array}{cc} a & b\\ 0 & 1\end{array}\right)\middle| a,\ b\in\mathbb{R}\text{且}a\neq 0\right\}$, 证明 G 是 $Gl(2,\mathbb{R})$ 的李子群, 并求 G 的李代数.

17. 证明李群 $U(n)$, $SU(n)$, $O(n)$ 及 $SO(n)$ 都是紧致的.

18. 设 $G=\left\{\left(\begin{array}{cccc} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 & \alpha\\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 & \beta\\ 0 & 0 & 1 & \gamma\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right): \alpha,\ \beta,\ \gamma\in\mathbb{R}\right\}$, 证明 G 是 $GL(4,\mathbb{R})$ 的李子群, 并求它的李代数.

19. 设 G 是李群, $\mathfrak{g}$ 为 G 的李代数. 令 $H=\{\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}|\sigma,\ \tau\in G\}$, $\mathfrak{h}=\{[X,Y]|X,Y\in\mathfrak{g}\}$. 证明 H 是 G 的李子群且 $\mathfrak{h}$ 是 H 的李代数. H 叫做 G 的换位子群, $\mathfrak{h}$ 叫做 $\mathfrak{g}$ 的换位子代数.

20. 证明: $GL(n,\mathbb{R})$ 的换位子群为 $SL(n,\mathbb{R})$, $gl(n,\mathbb{R})$ 的换位子代数是 $sl(n,\mathbb{R})$.

21. 设 $\varphi:\mathbb{R}\to G$ 是从实直线 $\mathbb{R}$ 到李群 G 中的连续同态, 证明 φ 是 C^∞ 的.

22. 设 $\psi: H\to G$ 是李群间的连续同态, 证明 ψ 是光滑映射.

23. 证明:

1) 设 V 为向量空间, $B\in\mathrm{Aut}(V)$, $C\in\mathrm{End}(V)$, 则 $\mathrm{Ad}_B(C)=B\circ C\circ B^{-1}$;

2) 设 $B\in GL(n,\mathbb{R})$, $C\in gl(n,\mathbb{R})$, 则 $\mathrm{Ad}_B(C)=BCB^{-1}$.

24. 证明存在单位球面 S^{n-1} 到齐性空间 $SO(n)/SO(n-1)$ 的微分同胚.

25. 证明球面 S^{2n-1} 微分同胚于齐性空间 $U(n)/U(n-1)$, 并且 S^{2n-1} 还微分同胚于 $SU(n)/SU(n-1)$.

26. 证明 $GL(n,\mathbb{R})$ 非连通, 它有两个连通分支.

提示: 设 $GL(n,\mathbb{R})^+$ 和 $GL(n,\mathbb{R})^-$ 是 $GL(n,\mathbb{R})$ 的子集, 分别由行列式为正值和负值的矩阵组成, 它们是 $GL(n,\mathbb{R})$ 的两个不相交但同胚的开子集, 因此只需证 $GL(n,\mathbb{R})^+$ 连通即可. 为证 $GL(n,\mathbb{R})^+$ 的每个成员均可由一条连续曲线与单位矩阵相连, 需用到一个事实: 每一个矩阵 $A\in GL(n,\mathbb{R})$ 能表为 $A=PR$, 其中 P 是一个正定对称矩阵, R 是一个正交矩阵.

第 4 章　流形上的积分

如果一个 m 维光滑流形是可定向的, 那么可以考虑一个 m 次微分形式在其上的积分, 在这里我们把微分形式作为积分的被积表达式, 而要做的积分从局部来看就是大家熟悉的黎曼积分, 因此可定向流形上微分形式的积分可看作数学分析中第二型曲线积分与曲面积分的推广. 在此框架内, 将证明斯托克斯定理. 这是一个重要的工具, 因为它建立了带边区域上的积分和该区域边界上的积分之间的联系. 它是微积分基本定理的推广, 包含了格林公式、高斯公式和斯托克斯公式, 其重要性不言而喻. 本章还考察了黎曼流形上的积分和李群上的积分, 讨论了映射度的积分表示. 斯托克斯定理的威力随后通过几个例子来显示, 包括: 球面和两个流形的乘积的不可微同胚性; 非收缩引理, 它的一个形象的直观解释是平面弹性薄片不可能收缩到它的边界上而不撕破任何部分, 并且由该引理可推出著名的 Brouwer 不动点定理; 另外还介绍了平面向量场的不动点定理等.

4.1　流形的定向

4.1.1　向量空间的定向

在直线 $\mathbb{R}^1$ 上选取一非零向量便指定了直线的一个方向, 这是给直线定向. 显然直线有两个方向. 而在平面 $\mathbb{R}^2$ 上选取一对有序的线性无关向量便给出了平面的旋转指向, 这也是给平面定向. 易见平面有两个方向. $\mathbb{R}^3$ 的一个定向对于向量的叉积而言就是选定右手规则或左手规则. 现在考虑 m 维向量空间的定向.

设 V 是一个 m 维实向量空间, $\{e_1, \cdots, e_m\}$ 和 $\{f_1, \cdots, f_m\}$ 为 V 的两组基, 因而有

$$f_j = \sum_{i=1}^{m} a_j^i e_i, \quad j = 1, \cdots, m,$$

并且基的变换矩阵的行列式 $J = \det(a_j^i) \neq 0$.

若 $J > 0$, 则称有序基 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ 和 $\{f_1, \cdots, f_m\}$ 确定 V 的相同定向. 不难验证这是 V 的所有基组成之集中的一个等价关系, 并且恰好只有两个等价类. V 的一个定向就是这两个等价类中之一的选择. 以有序基 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ 为代表的等价类给定 V 的一个定向, 记为 $\mu = [e_1, \cdots, e_m]$, 与之相反的定向记为 $-\mu = -[e_1, \cdots, e_m]$. 易见 $[e_2, e_1, \cdots, e_m] = -\mu$. 事实上, 对调任意两个基向量的位置, 空间改变定向.

我们还可以用外形式的语言来描述空间的定向. 记 m 维实向量空间 V 的对偶空间为 V^*, 则 $\Lambda^m(V^*)$ 是实 1 维的, 它同构于 $\mathbb{R}^1$, 这说明 V 的所有 m 阶反称协变张量 (即 m 次外形式) 之间只差一个常数倍. 任取一个非零 $\Omega \in \Lambda^m(V^*)$, 并令 $e_1, \cdots, e_m$ 为 V 的基, 则对任意一组向量 $\{v_i : i = 1, \cdots, m\}$, $v_i = \sum_{j=1}^{m} c_i^j e_j$, 有

$$\Omega(v_1, \cdots, v_m) = \det(c_i^j)\Omega(e_1, \cdots, e_m).$$

事实上, 因 Ω 是线性的与反称的, 故 Ω 可写为

$$\begin{aligned}\Omega(v_1, \cdots, v_m) &= \Omega\left(\sum_{j_1=1}^{m} c_1^{j_1} e_{j_1}, \cdots, \sum_{j_m=1}^{m} c_m^{j_m} e_{j_m}\right)\\ &= \sum_{j_1, \cdots, j_m} c_1^{j_1} \cdots c_m^{j_m} \Omega(e_{j_1}, \cdots, e_{j_m})\\ &= \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}\sigma \cdot c_1^{\sigma(1)} \cdots c_m^{\sigma(m)} \Omega(e_1, \cdots, e_m),\end{aligned}$$

这里 S_m 表示 m 个字母的置换群. 再据行列式的定义, 上式可写为

$$\Omega(v_1, \cdots, v_m) = \det(c_i^j)\Omega(e_1, \cdots, e_m).$$

由此可见, Ω 在具有相同定向的两组基 (即等价的两组基) 上的值具有相同符号, 而在非等价的两组基上的值具有相反符号. 另外, 当 $\lambda > 0$ 时 $\lambda\Omega$ 与 Ω 在 V 的任意基上的值具有相同符号, 而当 $\lambda < 0$ 时符号则相反. 于是可以推出 $\Lambda^m(V^*)$ 中两个非零外形式 Ω_1 和 Ω_2 确定 V 的相同定向当且仅当 $\Omega_1 = \lambda\Omega_2$, 其中 λ 为正实数. 而 $\Lambda^m(V^*) - \{0\}$ 是不连通的, 它是两个连通分支的并, 因此 V 的一个定向可以定义为 $\Lambda^m(V^*) - \{0\}$ 的两个连通分支中之一的选择.

例 1 设 $\{e_1, e_2\}$ 为欧氏平面上的规范正交基, 依逆时针旋转方向作为正向, $\{\omega_1, \omega_2\}$ 为 $\{e_1, e_2\}$ 的对偶基, 因而 $\omega_1 \wedge \omega_2(e_1, e_2) = 1$. 若 $v_1 = b_1^1 e_1 + b_1^2 e_2$, $v_2 = b_2^1 e_1 + b_2^2 e_2$ 是两个线性无关向量, 则

$$\omega_1 \wedge \omega_2(v_1, v_2) = \det\begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix} \omega_1 \wedge \omega_2(e_1, e_2) = b_1^1 b_2^2 - b_1^2 b_2^1,$$

其绝对值表示以 v_1, v_2 为邻边的平行四边形面积, 正负号由 v_1, v_2 成右手系还是左手系而定, 因此 $\omega_1 \wedge \omega_2(v_1, v_2)$ 表示以 v_1, v_2 为邻边的平行四边形的有向面积.

例 2 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 由 n 次形式 $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ 给出的定向对应于基 $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ 所确定的定向 $\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right]$, 这是 $\mathbb{R}^n$ 的自然定向, 此时 $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = 1$.

4.1.2 流形的定向

对流形 M, 需对每一个切空间 T_pM 定向, 并且要求"相邻"的切空间的定向是协合的.

定义 4.1.1 设 $(M,\mathcal{D})$ 为 m 维微分流形. 如果存在一个子集 $\mathcal{D}'\subset\mathcal{D}$ 满足:

(1) $\{U|(U,\varphi)\in\mathcal{D}'\}$ 是 M 的一个覆盖,

(2) 若 $(U_\alpha,\varphi_\alpha;x_1,\cdots,x_m)\in\mathcal{D}'$, $(U_\beta,\varphi_\beta;y_1,\cdots,y_m)\in\mathcal{D}'$, 则由

$$\mathrm{d}_{\alpha\beta}(p)=\det\{\mathrm{d}(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1})(\varphi_\beta(p))\}$$

确定的函数 $\mathrm{d}_{\alpha\beta}:U_\alpha\bigcap U_\beta\to\mathbb{R}$ 处处为正, 那么 $(M,\mathcal{D})$ 称为**可定向**的.

一个可定向流形 $(M,\mathcal{D})$ 的一个**定向**是满足条件 (1) 和 (2) 并且关于条件 (2) 为最大的子集 $\mathcal{D}'\subset\mathcal{D}$ 的一种选择. 一个**有向流形**指的是一个三元组 $(M,\mathcal{D},\mathcal{D}_1)$, 其中 $(M,\mathcal{D})$ 是一个可定向流形, $\mathcal{D}_1$ 是 $(M,\mathcal{D})$ 的一个定向.

显然, 如果 $\mathcal{D}'$ 满足条件 (1), (2), 那么

$$\mathcal{D}_1=\{(U,\varphi)|(U,\varphi)\in\mathcal{D}\text{且与}\mathcal{D}'\text{中任意成员满足条件(2)}\}.$$

而

$$\mathcal{D}_1^-=\{(U,\varsigma\circ\varphi)|(U,\varphi)\in\mathcal{D}_1\}$$

是 $(M,\mathcal{D})$ 的另一个定向, 其中 $\mathbb{R}^m$ 中的反射 ς: $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ 定义为

$$\varsigma(x_1,\cdots,x_{m-1},x_m)=(x_1,\cdots,x_{m-1},-x_m).$$

注意到 $\det\mathrm{d}(\varphi_\alpha\cdot\varphi_\beta^{-1})=\det\left(\dfrac{\partial}{\partial y_j}(x_i)\right)$, 所以条件 (2) 可表示为

$$\left.\frac{\partial(x_1,\cdots,x_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}\right|_{\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)}=\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_m}{\partial y_1}\\ \vdots & \vdots\\ \dfrac{\partial x_1}{\partial y_m} & \dfrac{\partial x_m}{\partial y_m}\end{pmatrix}_{\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)}>0.$$

条件 (2) 说明 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial y_1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial y_m}\right\}$ 和 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x_m}\right\}$ 为切空间的同向基, 即

$$\left[\frac{\partial}{\partial y_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y_m}\right]=\left[\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_m}\right],$$

其中

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial}{\partial y_m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_m}{\partial y_1}\\ \vdots & \vdots\\ \dfrac{\partial x_1}{\partial y_m} & \dfrac{\partial x_m}{\partial y_m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial}{\partial x_m}\end{pmatrix}.$$

定理 4.1.1 设 $(M,\mathcal{D})$ 是 m 维微分流形, 则 M 是可定向的当且仅当存在 M 上一个处处非零的光滑 m- 形式 ω.

证明 $\Rightarrow$ 设 $\mathcal{D}_1$ 是可定向流形 $(M,\mathcal{D})$ 的一个定向, 则 $\{U|(U,\varphi)\in\mathcal{D}_1\}$ 是 M 的一个开覆盖, 它有局部有限的开加细 $\{U_\alpha|(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathcal{D}_1,\alpha\in\Gamma\}$. 令 $\{\eta_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$ 为从属于 $\{U_\alpha\}$ 的单位分解.

设 $(x_1^\alpha,\cdots,x_m^\alpha)$ 为 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ 的局部坐标, 则

$$\omega_\alpha=\mathrm{d}x_1^\alpha\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_m^\alpha$$

是 U_α 上的一个没有零点的 m- 形式, 构作

$$\omega=\sum_{\alpha\in\Gamma}\eta_\alpha\mathrm{d}x_1^\alpha\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_m^\alpha,$$

显然 ω 是 M 上的光滑 m- 形式. 下面证明 ω 在 M 上处处非零.

任取 $p\in M$, 选取围绕点 p 的局部坐标系 $(U,\varphi;\ y_i)\in\mathcal{D}_1$. 若点 $p\in U\bigcap U_\alpha$, 则存在 C^∞ 函数 $f_\alpha:U\bigcap U_\alpha\to\mathbb{R}$ 处处为正, 使得

$$\mathrm{d}x_1^\alpha\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_m^\alpha=f_\alpha\mathrm{d}y_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_m.$$

因 $\sum\limits_{\alpha\in\Gamma}\eta_\alpha(p)=1$, 故有 $\alpha_0\in\Gamma$ 使得 $\eta_{\alpha_0}(p)>0$ 且 $f_{\alpha_0}(p)\cdot\eta_{\alpha_0}(p)>0$, 于是 $\sum\limits_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha(p)\cdot\eta_\alpha(p)>0$, 从而

$$\omega_p=\omega(p)=\sum_{\alpha\in\Gamma}\eta_\alpha(p)\mathrm{d}x_1^\alpha\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_m^\alpha=\left(\sum_{\alpha\in\Gamma}f_\alpha(p)\eta_\alpha(p)\right)\mathrm{d}y_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_m\neq 0.$$

$\Leftarrow$ 设 $(U,\varphi)\in\mathcal{D}$ 有连通的定义域 U, 坐标函数为 $(x_1,\cdots,x_m)$, 则存在 C^∞ 函数 $f_\varphi:U\to\mathbb{R}$ 使得

$$\omega|_U=f_\varphi\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_m.$$

因为 ω 在 M 上处处非零, 所以 f_φ 在 U 上也处处非零, 于是或者处处 $f_\varphi>0$ 或者处处 $f_\varphi<0$. 令

$$\mathcal{D}_1=\{(U,\varphi)\in\mathcal{D}|\,f_\varphi>0\},$$

这里 U 不必连通. 下面证明 $\mathcal{D}_1$ 是 M 的一个定向.

(1) $\mathcal{D}_1$ 覆盖 M. 因为假若存在点 $q\in M$ 以及围绕点 q 的局部坐标系 (V,ψ), 其中 V 连通, 并且使得 $f_\psi<0$, 那么在新的局部坐标系 $(V,\varsigma\circ\psi)$ 中, $f_{\varsigma\circ\psi}>0$, 于是 $(V,\varsigma\circ\psi)\in\mathcal{D}_1$.

(2) 如果 $(U_\alpha,\varphi_\alpha;\ x_i)\in\mathcal{D}_1$, $(U_\beta,\varphi_\beta;\ y_i)\in\mathcal{D}_1$, 并且 $U_\alpha\bigcap U_\beta\neq\varnothing$, 那么在 $U_\alpha\bigcap U_\beta$ 上, 有

$$\omega|_{U_\alpha\cap U_\beta}=f_{\varphi_\alpha}|_{U_\alpha\cap U_\beta}\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_m,\quad f_{\varphi_\alpha}|_{U_\alpha\cap U_\beta}>0,$$

及

$$\omega|_{U_\alpha\cap U_\beta}=f_{\varphi_\beta}|_{U_\alpha\cap U_\beta}\mathrm{d}y_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_m,\quad f_{\varphi_\beta}|_{U_\alpha\cap U_\beta}>0,$$

因而

$$\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_m=\frac{f_{\varphi_\beta}|_{U_\alpha\cap U_\beta}}{f_{\varphi_\alpha}|_{U_\alpha\cap U_\beta}}\mathrm{d}y_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}y_m,$$

于是在 $U_\alpha\bigcap U_\beta$ 上,

$$\mathrm{d}_{\alpha\beta}=f_{\varphi_\beta}|_{U\alpha\cap U_\beta}/f_{\varphi_\alpha}|_{U\alpha\cap U_\beta}>0.$$

(3) $\mathcal{D}_1$ 是满足定义 4.1.1 中条件 (2) 的最大子集, 请读者补述.

我们把 m 维 C^∞ 流形上的一个非零的光滑 m- 形式叫做**体积形式**或**体积元素**. 本定理表明每一个可定向流形容许有一个体积形式.

例 3 每一个李群都是可定向的, 因为若 $\omega_1,\cdots,\omega_r$ 是 G 上左不变 1- 形式的基, 则 $\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_r$ 是 G 上的一个处处非零的整体 r- 形式.

设 m 维 C^∞ 流形 M 由体积形式 ω 定向, $(U,\varphi;\ x_1,\cdots,x_m)$ 是 M 的任意一个局部坐标系, 则 $\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_m$ 与 $\omega|_U$ 差一个处处不为零的因子. 如果 $\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_m$ 与 $\omega|_U$ 差一个正因子, 则称 $(U,\varphi;\ x_1,\cdots,x_m)$ 是与 M 的**定向相符的坐标系**. 显然在可定向流形上可取定向相符的坐标覆盖, 并且对于任意两个相交的坐标邻域, 坐标变换的 Jacobi 行列式处处取正值.

定义 4.1.2 设 M 和 N 都是维数为 m 的有向流形, 分别由体积形式 ω 和 τ 定向. 假定 $F:M\to N$ 是一个 C^∞ 微分同胚, 并且对 M 的所有点 p, 有

$$F^*(\tau)(p)=\lambda(p)\omega(p),$$

其中 C^∞ 函数 $\lambda:M\to\mathbb{R}$ 处处为正, 我们说 F 保持 M 与 N 的定向.

等价地, F 称为**保定向的**, 如果对每一 $p\in M$, $(\mathrm{d}F)_p$ 将切空间 T_pM 的正向基映成切空间 $T_{F(p)}N$ 的正向基. 特别, 若 $M=N$, 则说 F 保持 M 的定向.

如何判定流形的可定向性呢? 下面介绍一个判别法. 为此先引入流形的内乘运算, 不妨复习一下 $\Lambda(V^*)$ 中的内乘运算. 设 V 为 m 维实向量空间, $v\in V$. 对满足 $1\leqslant k\leqslant m$ 的所有 k, 存在一个从 $\Lambda^k(V^*)$ 到 $\Lambda^{k-1}(V^*)$ 的线性映射 $i(v)$, 它定义如下: 对于 $\xi\in\Lambda^k(V^*)$, 以及 $v_1,\cdots,v_{k-1}\in V$, 令

$$(i(v)(\xi))\,(v_1,\cdots,v_{k-1})=\xi(v,v_1,\cdots,v_{k-1}).$$

过渡到流形, 设 X 是 m 维微分流形 M 上的一个向量场, 对满足 $1 \leqslant k \leqslant m$ 的所有 k, 定义映射 $i(X); A^k(M) \to A^{k-1}(M)$ 如下: 对于 $\omega \in A^k(M)$, 令

$$(i(X) \cdot \omega)(p) = i(X(p))(\omega(p)) \quad 对每一 p \in M.$$

在 $k = m$ 时, 利用 2.4 节公式 (9) 可给出 $i(X) \cdot \omega$ 的简洁表达式.

设 $(U; x_1, \cdots, x_m)$ 是 M 的一个局部坐标系, 则 $X = \sum_{i=1}^m X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $X_i \in C^\infty(U)$, $\omega|_U = a \cdot \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_m$, $a \in C^\infty(U)$, 于是

$$i(X) \cdot \omega|_U = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} a X_i \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_m. \tag{1}$$

定理 4.1.2 设 (M, F) 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的一个 n 维子流形. 假设 (M, F) 容许有一个非零"法向量场", 这意指存在一个 C^∞ 映射 $N: M \to T\mathbb{R}^{n+1}$, 使得对每一个 $p \in M, N(p)$ 是一个在切空间 $T_{F(p)}\mathbb{R}^{n+1}$ 中垂直于 $\mathrm{d}F(T_pM)$ 的非零向量 (见图 4.1), 那么 M 是可定向的.

注 在 $T_{F(p)}\mathbb{R}^{n+1}$ 中的垂直性是关于由

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \delta_{ij}$$

给出的内积 <,> 而言的

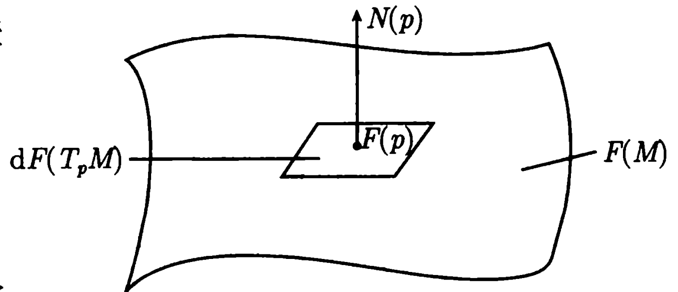


图 4.1

证明 采用文献 [2] 的证法. 对于给定的法向量场 N, 考虑在 $F(M)$ 的点上定义的 n- 形式 μ,

$$\mu = i(N) \cdot (\mathrm{d}r_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}r_{n+1}).$$

令 $\omega = F^*\mu$, 则 ω 是 M 上的一个光滑 n- 形式. 由定理 4.1.1, 只需证明 ω 在 M 上处处非零. 反设在某个 $q \in M$, 有 $\omega(q) = 0$, 则对所有 $v_1, \cdots, v_n \in T_qM$,

$$0 = \omega(q)(v_1, \cdots, v_n) = F^*\mu(q)(v_1, \cdots, v_n) = \mu(F(q))((\mathrm{d}F)_q(v_1), \cdots, (\mathrm{d}F)_q(v_n)). \tag{2}$$

而每一个向量 $u \in T_{F(q)}\mathbb{R}^{n+1}$ 都可表示为 $u = (\mathrm{d}F)_q(v) + cN(q)$, 其中 $v \in T_qM, c \in \mathbb{R}$, 因此对于向量

$$u_i = (\mathrm{d}F)_q(v_i) + c_i N(q) \in T_{F(q)}\mathbb{R}^{n+1}, \quad i = 1, \cdots, n,$$

我们有

$$
\begin{aligned}
&\mu(F(q))(u_1,\cdots,u_n)\\
&=\mu_{F(q)}((\mathrm{d}F)_q(v_1)+c_1N(q),\cdots,(\mathrm{d}F)_q(v_n)+c_nN(q))\\
&=\mu_{F(q)}((\mathrm{d}F)_q(v_1),\cdots,(\mathrm{d}F)_q(v_n))\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}c_j\mu_{F(q)}((\mathrm{d}F)_q(v_1),\cdots,(\mathrm{d}F)_q(v_{j-1}),N(q),(\mathrm{d}F)_q(v_{j+1}),\cdots,(\mathrm{d}F)_q(v_n)),
\end{aligned}
$$

所有其他项都是零, 因为 $N(q)$ 作为自变量出现两次, 而 μ 是反对称的. 由 (2) 式知, 上面和式中的第一项等于零. 又因为

$$
\begin{aligned}
\mu(\cdots,N,\cdots)&=i(N)\mathrm{d}r_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}r_{n+1}(\cdots,N,\cdots)\\
&=\mathrm{d}r_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}r_{n+1}(N,\cdots,N,\cdots)\\
&=0,
\end{aligned}
$$

所以和式中的所有各项都为零. 又 $u_1,\cdots,u_n\in T_{F(q)}\mathbb{R}^{n+1}$ 是任取的, 这说明 $\mu(F(q))=0$.

另一方面, 将 N 写作 $N=\sum\limits_{i=1}^{n+1}N_i\dfrac{\partial}{\partial r_i}$, 由 (1) 式知

$$
\mu=i(N)\cdot\mathrm{d}r_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}r_{n+1}=\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{j-1}N_i\mathrm{d}r_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}r_j}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}r_{n+1},
$$

由于对某个 j, $N_j\neq 0$, 故 $\mu(F(q))\neq 0$. 这一矛盾证明了本定理.

例 4　单位球面 S^n 是可定向的, 因为 S^n 上存在非零法向量场, 它是 $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$ 上径向向外的单位向量场在 S^n 上的限制. $F=-id_{\mathbb{R}^{n+1}}|_{S^n}$ 保持 S^n 的定向当且仅当 n 是奇数 (留作练习).

作为推广, $\mathbb{R}^{n+1}$ 中每一个紧致连通的 n 维子流形是可定向的. 该子流形将 $\mathbb{R}^{n+1}$ 分成两个连通分支, 一个有界, 另一个无界. 这样的子流形容许一个单位法向量场, 例如指向无界的连通分支的那一个.

例 5　Möbius 带 S 是不可定向的. 在 S 上不存在非零法向量场. 因为如果这样的一个场沿着中心线连续变动, 它在走完一整圈后就应该指向相反方向. Möbius 带是单侧曲面.

对于流形的可定向性希望了解更多知识的读者, 例如可参看文献 [18].

4.1.3　带边区域和它的边界的定向

记 $H^m=\{(x_1,\cdots,x_m)\in\mathbb{R}^m|x_m\geqslant 0\}$, 称为 $\mathbb{R}^m$ 的上半空间.

定义 4.1.3　设 D 是 m 维流形 M 的闭子集, 满足下列条件: 对于 D 的每个点 p,

(i) 或者存在点 p 的开邻域 W 使得 $W \subset D$,

(ii) 或者存在一个中心在点 p 的坐标卡 (U,φ), 使得 $\varphi(U \bigcap D) = \varphi(U) \bigcap H^m$. 则称 D 为 M 中的一个**区域**(见图 4.2).

情形 (i) 中的点称为 D 的内点. 将 D 的内点的集合记为 $\mathrm{Int}(D)$, 易见它是 M 的开子集, $\mathrm{Int}(D)$ 作为 M 的开子流形, 维数亦为 m.

情形 (ii) 中的点称为 D 的边界点. 将 D 的边界点的集合记为 ∂D, 称为 D 的边界. 因为对每一 $p \in \partial D$, 存在一个中心为 p 的局部坐标系 $(U,\varphi;\ x_i)$, 使得

$$\varphi(\partial D \bigcap U) = \varphi(U) \bigcap \{(x_1,\cdots,x_m) \in \mathbb{R}^m | x_m = 0\},$$

因此 ∂D 是 M 的一个 $m-1$ 维正则子流形.

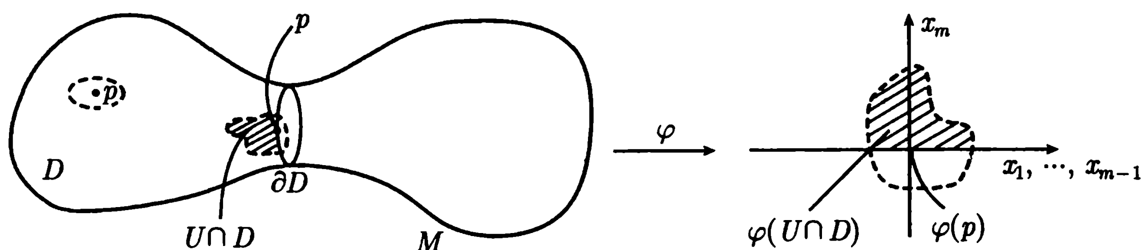


图 4.2

现取点 $p \in \partial D$, 向量 $v \in T_pM$. 如果 M 中经过点 p 的每一条光滑曲线 $\alpha(t)$ 满足 $\dot{\alpha}(0) = v$, 则 $\alpha(t) \notin D$ 对 $0 < t < \varepsilon$(其中 ε 是某一正实数) 皆成立, 那么就说 v 是 D 的一个**外指向量**.

M 的定向可诱导出 ∂D 的定向：设 v 是 ∂D 在点 p 处的一个外指向量, $v_1,\cdots,v_{m-1}$ 是切空间 $T_p\partial D$ 的基. 当 $v,v_1,\cdots,v_{m-1}$ 决定 T_pM 的定向时, 我们说 $v_1,\cdots,v_{m-1}$ 确定了 $T_p\partial D$ 的一个定向, 即 ∂D 在点 p 处的定向. 不难验证, 该定义与外指向量 v 以及 $v_1,\cdots,v_{m-1}$ 的具体选取无关.

例 6 $\mathbb{R}^2$ 的上半平面 H^2 以 x 轴为边界. 设 $\{e_1,e_2\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的规范正交基, 平面按右手系定向, $\mu = [e_1,e_2]$. 取 $v = -e_2$ 为带边区域 H^2 的边界上的外指向量, 则 $\mu = [v,e_1]$, 所以 H^2 的边界 x 轴上的诱导定向为 $[e_1]$.

一般地, $\mathbb{R}^m$ 的上半空间 H^m 看作 $\mathbb{R}^m$ 的带边区域, 其边界 ∂H^m 是超平面 $x_m = 0$. 设 $\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的规范正交基, 定向由 $\mu = [e_1,e_2,\cdots,e_m]$ 给出. 取 $v = -e_m$ 为超平面 $x_m = 0$ 上的外指向量, 则

$$\mu = (-1)^{m-1}[e_m,e_1,\cdots,e_{m-1}] = (-1)^m[v,e_1,\cdots,e_m],$$

因而在边界 ∂H^m 上的诱导定向是 $(-1)^m[e_1,\cdots,e_{m-1}]$.

特别当 $m = 3$ 时, 由 $\mathbb{R}^3$ 的定向 $\mu = [e_1,e_2,e_3]$ 所诱导的在 H^3 的边界 ∂H^3(即 xOy 平面) 上的定向为 $(-1)^3[e_1,e_2] = [e_2,e_1]$(见图 4.3).

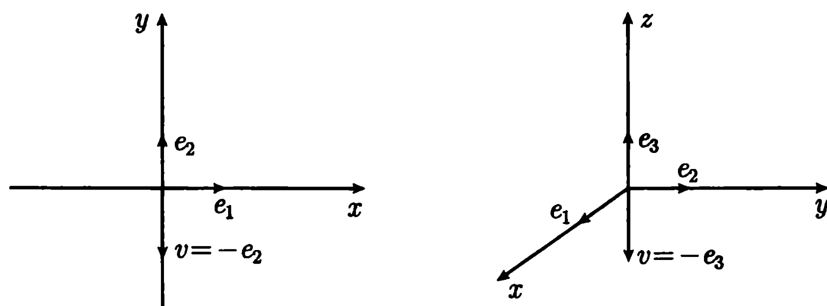


图 4.3

定理 4.1.3 说 $(M,\mathcal{D})$ 是一个 m 维可定向流形, D 是 M 的一个带边区域, 则 ∂D 作为 M 的一个 $m-1$ 维正则闭子流形也是可定向的.

证明 设 $\mathcal{D}_1=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)|\alpha\in\Gamma\}$ 是可定向流形 M 的一个定向. 因 ∂D 为 M 的 $m-1$ 维正则子流形, 故对每一 $p\in\partial D$, 存在点 p 的局部坐标系 $(U,\varphi;\ x_i)$, 使得

$$\varphi(D\bigcap U)=\varphi(U)\bigcap\{(x_1,\cdots,x_m)\in\mathbb{R}^m|x_m\geqslant 0\}. \tag{3}$$

令 $\mathcal{D}_2=\{(U,\varphi)|(U,\varphi)\in\mathcal{D}_1$且满足 (3) 式$\}$. 取 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathcal{D}_2,(U_\beta,\varphi_\beta)\in\mathcal{D}_2$. 若 $U_\alpha\bigcap U_\beta\neq\varnothing$, 则在 $\varphi_\alpha(U_\alpha\bigcap U_\beta)$ 上, 令

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}:(x_1,\cdots,x_m)\mapsto(y_1,\cdots,y_m),$$

我们有

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_m}\right]=\left[\frac{\partial}{\partial y_1},\frac{\partial}{\partial y_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial y_m}\right].$$

由于

$$\varphi_\alpha(U_\alpha\bigcap U_\beta\bigcap\partial D)\subset\mathbb{R}^{m-1}\times\{0\},\quad \varphi_\beta(U_\alpha\bigcap U_\beta\bigcap\partial D)\subset\mathbb{R}^{m-1}\times\{0\}.$$

因此 $y_m(x_1,\cdots,x_{m-1},0)\equiv 0$, 这蕴涵 $\dfrac{\partial y_m}{\partial x_i}(x_1,\cdots,x_{m-1},0)=0,\ i=1,\cdots,m-1$. 又函数

$$x_m\mapsto y_m(x_1,\cdots,x_{m-1},x_m)$$

对于所有 $x_m\geqslant 0$ 取非负值, 而在 $x_m=0$ 时取零值, 故 $\dfrac{\partial y_m}{\partial x_m}(x_1,\cdots,x_{m-1},0)\geqslant 0$.

现令 $W=\varphi_\alpha(U_\alpha\bigcap U_\beta)\bigcap(\mathbb{R}^{m-1}\times\{0\})$, 则有

$$\mathrm{d}(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})|W=\left(\begin{array}{ccc:c}\multicolumn{3}{c:}{\mathrm{d}((\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})|W)} & 0\\ \hdashline \dfrac{\partial y_1}{\partial x_m} & \cdots & \dfrac{\partial y_{m-1}}{\partial x_m} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_m}\end{array}\right)$$

和

$$\det(\mathrm{d}(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})|W)=\frac{\partial y_m}{\partial x_m}\cdot\det(\mathrm{d}((\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})|W)).$$

而 $\det(\mathrm{d}(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})|W)>0$, $\dfrac{\partial y_m}{\partial x_m}(x_1,\cdots,x_{m-1},0)\geqslant 0$, 故 $\det(\mathrm{d}((\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})|W))>0$. 于是 $\{(U\bigcap\partial D,\varphi|U\bigcap\partial D)|(U,\varphi)\in\mathcal{D}_2\}$ 确定了 ∂D 的一个定向, 因此 ∂D 是可定向的.

4.2 形式的积分与斯托克斯 (Stokes) 定理

4.2.1 形式的积分

有向流形上外微分形式的积分是数学分析中第二型曲线积分与曲面积分的推广. 定义这种积分还需用到单位分解知识.

设 $(M,\mathcal{D})$ 为 m 维可定向流形, $\mathcal{D}_1$ 为其定向, ω 是 M 上的 m 次外微分形式, 具有紧致支集, 即

$$\mathrm{Supp}\omega=\overline{\{p\in M|\omega(p)\neq 0\}}$$

为 M 的紧致子集. 假设 $\{U_\alpha|(U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\mathcal{D}_1,\alpha\in\Gamma\}$ 是 M 的局部有限的开覆盖, $\{\eta_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$ 为从属于 $\{U_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$ 的单位分解, 那么

$$\omega=\left(\sum_{\alpha\in\Gamma}\eta_\alpha\right)\cdot\omega=\sum_{\alpha\in\Gamma}(\eta_\alpha\cdot\omega). \tag{1}$$

因为 $\mathrm{Supp}\omega$ 紧致, $\{\mathrm{Supp}\eta_\alpha|\alpha\in\Gamma\}$ 局部有限, 因此 $\mathrm{Supp}\omega$ 只与有限多个 $\mathrm{Supp}\eta_\alpha$ 相交, (1) 式右端实际上只是有限多个项的和. 显然, $\mathrm{Supp}(\eta_\alpha\cdot\omega)\subset\mathrm{Supp}\eta_\alpha\subset U_\alpha$, 所以可以定义

$$\int_M\eta_\alpha\cdot\omega=\int_{U_\alpha}\eta_\alpha\cdot\omega. \tag{2}$$

而上式右端理解如下：在 $(U_\alpha,\varphi_\alpha;x_i^\alpha)$ 中,

$$\eta_\alpha\omega=\eta_\alpha\cdot a_\alpha\mathrm{d}x_1^\alpha\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_m^\alpha,$$

其中 $a_\alpha\in C^\infty(U_\alpha)$. 又 $\mathrm{Supp}\eta_\alpha\omega\subset\mathrm{Supp}\omega$ 为紧致集, 故

$$\int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)}(\eta_\alpha\cdot a_\alpha)\circ\varphi_\alpha^{-1}(x_1^\alpha,\cdots,x_m^\alpha)\mathrm{d}x_1^\alpha\mathrm{d}x_2^\alpha\cdots\mathrm{d}x_m^\alpha \tag{3}$$

为有限值, 因此 (2) 式右端的积分就是 (3) 式. 然后, 令

$$\int_M\omega=\sum_{\alpha\in\Gamma}\int_M\eta_\alpha\cdot\omega, \tag{4}$$

显然上述和只有有限个项可能不为 0.

定义 4.2.1　设 M 是 m 维可定向流形, ω 是 M 上的有紧致支集的 m 次外微分形式, 由 (4) 式定义的数值 $\int_M \omega$ 称为**外微分形式 ω 在 M 上的积分**.

这里还需要说明积分 $\int_M \omega$ 的定义既与 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{D}_1, \alpha \in \Gamma\}$ 的选取无关, 又与单位分解 $\{\eta_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$ 的选取无关, 即说明积分的定义是合理的.

设 $\{V_\beta | (V_\beta, \psi_\beta;\ y_j^\beta) \in \mathcal{D}_1, \beta \in \Delta\}$ 是 M 的另一个局部有限的开覆盖, $\{\tau_\beta | \beta \in \Delta\}$ 为从属于 $\{V_\beta | \beta \in \Delta\}$ 的单位分解, 则在 $U_\alpha \bigcap V_\beta (\neq \varnothing)$ 上,

$$
\begin{aligned}
&\omega = a_\alpha \mathrm{d}x_1^\alpha \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_m^\alpha = b_\beta \mathrm{d}y_1^\beta \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_m^\beta, \\
&b_\beta = \frac{\partial(x_1^\alpha, \cdots, x_m^\alpha)}{\partial(y_1^\beta, \cdots, y_m^\beta)} a_\alpha, \quad \frac{\partial(x_1^\alpha, \cdots, x_m^\alpha)}{\partial(y_1^\beta, \cdots, y_m^\beta)} > 0.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\alpha \in \Gamma} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (\eta_\alpha \cdot a_\alpha) \circ \varphi_\alpha^{-1}(x_1^\alpha, \cdots, x_m^\alpha) \mathrm{d}x_1^\alpha \cdots \mathrm{d}x_m^\alpha \\
= &\sum_{\alpha \in \Gamma} \sum_{\beta \in \Delta} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta)} (\tau_\beta \cdot (\eta_\alpha \cdot a_\alpha)) \circ \varphi_\alpha^{-1}(x_1^\alpha, \cdots, x_m^\alpha) \mathrm{d}x_1^\alpha \cdots \mathrm{d}x_m^\alpha \\
= &\sum_{\beta \in \Delta} \sum_{\alpha \in \Gamma} \int_{\psi_\beta(V_\beta \cap U_\alpha)} (\eta_\alpha \cdot (\tau_\beta \cdot b_\beta)) \circ \psi_\beta^{-1}(y_1^\beta, \cdots, y_m^\beta) \mathrm{d}y_1^\beta \cdots \mathrm{d}y_m^\beta \\
= &\sum_{\beta \in \Delta} \int_{\psi_\beta(V_\beta)} (\tau_\beta \cdot b_\beta) \circ \psi_\beta^{-1}(y_1^\beta, \cdots, y_m^\beta) \mathrm{d}y_1^\beta \cdots \mathrm{d}y_m^\beta,
\end{aligned}
$$

其中第 2 个等式是由黎曼积分的变量替换公式得到的. 再据 (2), (3), 得

$$
\sum_{\alpha \in \Gamma} \int_M \eta_\alpha \cdot \omega = \sum_{\beta \in \Delta} \int_M \tau_\beta \cdot \omega,
$$

这正是我们需证的.

若 $\omega, \omega_1, \omega_2$ 都是 m 维有向流形 M 上有紧致支集的 m 次外微分形式, 则 $\omega_1 + \omega_2$ 及 $c\omega$(其中 c 为任意实数) 均有紧致支集. 据积分定义, 显然有

$$
\begin{aligned}
&\int_M (\omega_1 + \omega_2) = \int_M \omega_1 + \int_M \omega_2, \\
&\int_M c\omega = c \int_M \omega,
\end{aligned}
$$

这说明积分 $\int_M$ 是 M 上有紧致支集的 m 次外微分形式的集合上的线性函数.

记 M^- 为和 M 定向相反的有向流形, 则 $\int_{M^-} \omega = -\int_M \omega$. 证明留作练习.

4.2.2 斯托克斯定理

建立 $\mathbb{R}^n$ 中一个区域上的积分和它边界上的积分之间的联系是数学分析中最基本、最重要的一个结果, 本段将就流形的情形予以讨论.

定理 4.2.1 设 D 是 m 维有向流形 M 中的带边区域, ω 是 M 上有紧致支集的 $m-1$ 次外微分形式. 则

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_{\partial D} \omega. \tag{5}$$

若 $\partial D = \varnothing$, 则规定上式右边的积分为零.

证明 设 $\mathcal{D}_1 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in \Gamma\}$ 是与 M 的定向相符的一族局部坐标卡, 满足如下条件; $\{(U_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$ 是 M 的局部有限的开覆盖, 并且当 $U_\alpha \bigcap \partial D \neq \varnothing$ 时,

$$\varphi_\alpha(U_\alpha \bigcap D) = \varphi_\alpha(U_\alpha) \bigcap \{(x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m | x_m \geqslant 0\}.$$

又设 $\{\eta_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$ 是从属于 $\{U_\alpha | \alpha \in \Gamma\}$ 的单位分解, 于是

$$\omega = \sum_{\alpha \in \Gamma} \eta_\alpha \cdot \omega.$$

因为支集 Suppω 是紧致的, 上式右边只是有限项的和, 所以有

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \sum_{\alpha \in \Gamma} \int_D \mathrm{d}(\eta_\alpha \cdot \omega)$$

和

$$\int_{\partial D} \omega = \sum_{\alpha \in \Gamma} \int_{\partial D} \eta_\alpha \cdot \omega.$$

如果对每一 $\alpha \in \Gamma$, 能证明

$$\int_D \mathrm{d}(\eta_\alpha \omega) = \int_{\partial D} \eta_\alpha \cdot \omega,$$

那么就保证 (5) 式成立. 不失一般性, 假定支集 Suppω 包含在 $\mathcal{D}_1$ 中某一成员内, 为简单计, 删去下标, 设为 (U, φ), 其坐标函数为 $(x_1, \cdots, x_m)$, 此时 ω 的表达式为

$$\omega = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} a_j \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_j} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_m,$$

其中 $a_j \in C^\infty(U)$, 并且

$$\mathrm{d}\omega = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_m.$$

下面分两种情形:

(1) $U \bigcap \partial D = \varnothing$, 则 $\omega|\partial D = 0$, (5) 式右边为零. 这时 U 或者包含在 $M - D$ 内, 或者包含在 D 的内部. 对于前者, (5) 式左边必然为零; 对于后者, 则有

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \sum_{j=1}^{m} \int_U \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_m.$$

$\varphi(\mathrm{Supp}\omega)$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中是紧致的, 不妨设 $\varphi(U)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的有界开集, 这样一来在 $\mathbb{R}^m$ 中存在方体 $C : |x_i| \leqslant K$, $i = 1, \cdots, m$, 使得 $\varphi(U) \subset C$. 而

$$\mathrm{Supp}(a_j \circ \varphi^{-1}) \subset \varphi(U),$$

并且 $\varphi(U) - \mathrm{Supp}(a_j \circ \varphi^{-1})$ 是开集, 故可以将 $a_j \circ \varphi^{-1}$ 延拓为 C 上的 C^∞ 函数, 使得它在 $C - \varphi(U)$ 上取值为零, 这里 $j = 1, \cdots, m$. 为简单计, 把 $a_j \circ \varphi^{-1}$ 仍记作 a_j, 则有

$$\begin{aligned}
\int_D \mathrm{d}\omega &= \sum_{j=1}^{m} \int_{\varphi(U)} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_m = \sum_{j=1}^{m} \int_C \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_m \\
&= \sum_{j=1}^{m} \int_{\substack{|x_i| \leqslant K \\ i \neq j}} \left(\int_{-K}^{K} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \right) \mathrm{d}x_1 \cdots \widehat{\mathrm{d}x_j} \cdots \mathrm{d}x_m \\
&= \sum_{j=1}^{m} \int_{\substack{|x_i| \leqslant k \\ i \neq j}} a_j \Big|_{x_j=-K}^{x_j=K} \mathrm{d}x_1 \cdots \widehat{\mathrm{d}x_j} \cdots \mathrm{d}x_m \\
&= \sum_{j=1}^{m} \int_{\substack{|x_i| \leqslant k \\ i \neq j}} 0 \cdot \mathrm{d}x_1 \cdots \widehat{\mathrm{d}x_j} \cdots \mathrm{d}x_m \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(2) $U \bigcap \partial D \neq \varnothing$. 在 $\mathbb{R}^m$ 中取长方体 $\tilde{C} : |x_i| \leqslant K$, $i = 1, \cdots, m-1$, $0 \leqslant x_m \leqslant K$, 使 $\varphi(U \bigcap D)$ 落在 $\tilde{C}$ 的内部与边界 $x_m = 0$ 的并集内. 将 $a_j \circ \varphi^{-1} (j = 1, \cdots, m)$ 延拓为 $\tilde{C}$ 上的 C^∞ 函数, 使得它在 $\tilde{C} - \varphi(U)$ 上取值为零 (省去的细节请读者补述). 把 $a_j \circ \varphi^{-1}$ 仍记为 a_j, 则 (5) 式左边为

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_{D \cap U} \mathrm{d}\omega = \sum_{j=1}^{m} \int_{D \cap U} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_m. \tag{6}$$

对于 $1 \leqslant j \leqslant m-1$,

$$\begin{aligned}
&\int_{D \cap U} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_m = \int_{\varphi(U \cap D)} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_m \\
&= \int_{\tilde{C}} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_m = \int_{\substack{|x_i| \leqslant K, i \neq j, m \\ 0 \leqslant x_m \leqslant K}} \left(\int_{-K}^{K} \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \mathrm{d}x_j \right) \mathrm{d}x_1 \cdots \widehat{\mathrm{d}x_j} \cdots \mathrm{d}x_m \\
&= 0,
\end{aligned}$$

所以 (6) 式中只含一项

$$
\begin{aligned}
&\int_{D\cap U}\frac{\partial a_m}{\partial x_m}\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_m\\
=&\int_{\substack{|x_i|\leqslant K\\1\leqslant i\leqslant m-1}}[a_m(x_1,\cdots,x_{m-1},K)\\
&-a_m(x_1,\cdots,x_{m-1},0)]\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{m-1}\\
=&-\int_{\substack{|x_i|\leqslant K\\1\leqslant i\leqslant m-1}}a_m(x_1,\cdots,x_{m-1},0)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{m-1}.
\end{aligned}\tag{7}
$$

(5) 式的右边是

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial D}\omega=\int_{\partial D\cap U}\omega&=\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\int_{\partial D\cap U}a_j\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_j}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_m\\
&=(-1)^{m-1}\int_{\partial D\cap U}a_m\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{m-1}\\
&=-\int_{\varphi(U)\cap\partial H^m}a_m\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{m-1}\\
&=-\int_{\tilde{C}\cap\partial H^m}a_m\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{m-1}\\
&=-\int_{\substack{|x_i|\leqslant K\\1\leqslant i\leqslant m-1}}a_m(x_1,\cdots,x_{m-1},0)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{m-1},
\end{aligned}\tag{8}
$$

其中第 3 个等号是因为在 $U\bigcap\partial D$ 上, $\mathrm{d}x_m=0$, 第 4 个等号用到了在 $U\bigcap\partial D$ 上的诱导定向. 比较 (7) 式与 (8) 式知 (5) 式成立, 定理得证.

下面说明数学分析中几个重要的经典公式都可以用斯托克斯定理来统一表达.

例 1 设 f 是闭区间 $[a,b]\subset\mathbb{R}^1$ 上的连续可微函数, 则有牛顿–莱布尼兹公式

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(x)\Big|_a^b=f(b)-f(a).\tag{9}$$

记 $D=[a,b]$ 按 $\mathbb{R}^1$ 定向, D 的边界是 $\{a\}\bigcup\{b\}$. 对于 b 指定“+”号, 而对于 a 指定“−”号, 于是 $\partial D=\{-a,+b\}$. 从而 (9) 式可写成

$$\int_D\mathrm{d}f=\int_{\partial D}f.$$

例 2 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中一个有界闭区域, 其定向与 $\mathbb{R}^2$ 一致. 边界 ∂D 为闭曲线, 其定向由 D 所诱导, 即在 ∂D 的点处的外指向量与 ∂D 的正向形成 $\mathbb{R}^2$ 的正向基 (图 4.4). 设 P,Q 是 D 上的连续可微函数, 则有格林 (Green) 公式

$$\int_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\tag{10}$$

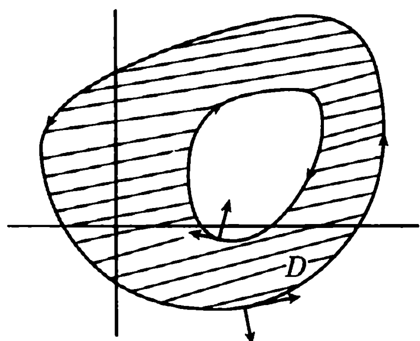


图 4.4

若令 $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$, 则 $\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, 公式 (10) 可写为 $\int_{\partial D} \omega = \int_D \mathrm{d}\omega$.

例 3　设 D 是 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭区域, 定向与 $\mathbb{R}^3$ 一致. 以闭曲面 ∂D 的外法线方向为正向诱导出边界 ∂D 的定向. 设 P, Q, R 是 D 上的连续可微函数, 则有高斯公式

$$\iint_{\partial D} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

现可记成 $\int_{\partial D} \omega = \int_D \mathrm{d}\omega$, 其中 $\omega = P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, $\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$.

例 4　设 S 是 $\mathbb{R}^3$ 中一块有向曲面, 其边界 ∂S 是空间闭曲线, 具有从 S 诱导的定向. 若 P, Q, R 是在包含 S 在内的一个区域上的连续可微函数, 则斯托克斯公式是说

$$\int_{\partial S} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

若记 $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$, 则上式可写成 $\int_{\partial S} \omega = \int_S \mathrm{d}\omega$.

4.2.3　黎曼流形上的积分

设 M 是 m 维黎曼流形, 即 M 是 m 维光滑流形带有对称正定的二阶协变张量场, 也就是说在每一切空间 T_pM 上有一个正定内积 $<,>_p$, 并且要求 $<,>_p$ 是光滑的, 即对于 M 上的任意光滑向量场 X 和 Y, 映射 $p \mapsto <X, Y>_p = <X(p), Y(p)>_p$ 是 M 上的光滑函数.

现给定一点 $p \in M$, 可以找到点 p 的一个坐标邻域 U 以及 U 上的光滑向量场 $e_1, \cdots, e_m$, 使得这些向量场在下列意义下是规范正交的：对于 U 中的每一点 $q, (e_1)_q, \cdots, (e_m)_q$ 是切空间 T_qM 上的规范正交基. 事实上, 在局部坐标系 $(U, x_1, \cdots x_m)$ 里, 将通常的 Gram–Schmidt 方法应用于向量场 $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ 使之规范正交化, 并且是在 U 的所有点上都同时这样做 (细节留给读者). 我们把这样一族向量场 $e_1, \cdots, e_m$ 叫做**局部的规范正交标架场**.

内积 $<,>_p$: $T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ 作为双线性映射是非奇异的, 这指的是只要 $v \in T_pM$ 不为 0, 就有 $w \in T_pM$ 使得 $< v,\ w >_p \neq 0$, 因此它可诱导一个自然同构

$$\varphi : T_pM \to T_p^*M, \quad v \mapsto \varphi_v,$$

这里 φ_v 定义为 $\varphi_v(w) = < v, w >_p, w \in T_pM$. 借助于这一同构, T_p^*M 继承一个内积, 并且 T_pM 的规范正交基的对偶基自然是 T_p^*M 的一个规范正交基.

现设 $e_1, \cdots, e_m$ 是 U 上的一个局部规范正交标架场, 并假定 $\omega_1, \cdots, \omega_m$ 是对偶的 1- 形式, 因而在 U 上, 有

$$\omega_i(e_j) = \delta_{ij},$$

所以 $\omega_1, \cdots, \omega_m$ 组成 U 上的一个局部规范正交余标架场. 在坐标邻域 U 和 U' 上, 考虑两个这样的局部规范正交余标架场: 在 U 上是 $\omega_1, \cdots, \omega_m$, 在 U' 上是 $\omega_1', \cdots, \omega_m'$, 那么在 $U \bigcap U'$ 上

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m = \det A\, \omega'_1 \wedge \cdots \wedge \omega'_m,$$

其中 $A = (a_{ij})$ 是正交矩阵, 每一 $a_{ij} \in C^\infty(U \bigcap U')$. 由于 $\det A = \pm 1$. 因此上式可写为

$$\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m = \pm \omega'_1 \wedge \cdots \wedge \omega'_m.$$

假定黎曼流形 M 是可定向的. 坐标域 U 上的一个局部余标架场 $\omega_1, \cdots, \omega_m$ 叫做定向的, 如果 $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m$ 在 U 的每一点处确定的定向是 M 的定向. 现在 M 的每一点处选取一个局部定向的规范正交余标架场, 相应的 m- 形式 $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m$ 由于在坐标邻域的相交部分是一致的, 所以确定 M 上一个整体定义的处处非零的 m- 形式 ω, 该形式称为有向黎曼流形 M 的**体积形式**, ω 在 M 上的积分 $\int_M \omega$ 是 M 的体积. 若 f 是 M 上的一个连续函数具有紧致支集, 规定 f 在 M 上的积分为(连续的)m- 形式 $f\omega$ 在 M 上的积分, 即

$$\int_M f = \int_M f\omega.$$

4.2.4 李群上的积分

设 G 是一个 r 维李群. 由上一节例 3 知 G 是可定向的, 现在我们选定 G 的一个定向.

注意 G 上的左不变 r- 形式由它在一点处的值唯一决定, 并且一个 r 维实向量空间的 r 次外幂是实 1 维向量空间, 因此 G 上左不变 r- 形式恰好组成一个实 1 维向量空间. 选取一个非零左不变 r- 形式 ω 使得与 G 的定向相符.

若 G 上的一个连续函数 f 具有紧致支集, 则 f 在 G 上的积分 $\int_G f$ 规定为

$$\int_G f = \int_G f\omega. \tag{11}$$

积分 (11) 具有左不变性. 事实上, 由 $\sigma \in G$ 所产生的左平移 $l_\sigma : G \to G$ 是一个微分同胚, l_σ 是保定向的并且 $l_\sigma^*\omega = \omega$, 据习题 4 第 8 题, 有

$$\int_G f = \int_G f\omega = \int_G l_\sigma^*(f\omega) = \int_G (f \circ l_\sigma)\omega = \int_G f \circ l_\sigma$$

这表明 f 在 G 上的积分和它的任意一个左平移 $f \circ l_\sigma$ 在 G 上的积分相同, 因此我们说积分 (11) 是左不变的, 把它叫做 G 上的 **Haar 积分或不变积分**.

问: 积分 (11) 是否右不变呢? 在什么条件下,

$$\int_G f = \int_G f \circ r_\sigma$$

对每一 $\sigma \in G$ 都成立呢? 因为

$$l_\tau^* r_\sigma^* \omega = r_\sigma^* l_\tau^* \omega = r_\sigma^* \omega,$$

所以 $r_\sigma^*\omega$ 是左不变的, 它可表为 ω 的某个常数倍, 这表示存在一个函数 $\tilde{\lambda} : G \to \mathbb{R} - \{0\}$, 使得 $r_\sigma^*\omega = \tilde{\lambda}(\sigma)\omega$, 并且不难验证 $\tilde{\lambda}$ 是光滑函数. 令

$$\lambda(\sigma) = |\tilde{\lambda}(\sigma)|,$$

显然有 $\lambda(\sigma\tau) = \lambda(\sigma)\lambda(\tau)$, 因此 λ 是一个从 G 到正实数组成的乘法群中的李群同态, 我们把 λ 叫做**模函数**.

再一次利用本章第 8 题, 对于每一 $\sigma \in G$, 有

$$\int_G f\omega = \int_G (f \circ r_\sigma)\lambda(\sigma)\omega. \tag{12}$$

由此得到, 积分 (11) 是右不变的当且仅当对任意 $\sigma \in G$, 模函数 $\lambda(\sigma) \equiv 1$.

我们把模函数 λ 恒为 1 的李群叫做**幺模李群**. 问: 什么样的李群是幺模李群?

由 (11) 式可见, f 在 G 上的积分值与非零左不变 r- 形式 ω 的选取有关. 但 G 上的非零左不变 r- 形式若与 G 的定向相符, 彼此只相差一个正实数倍, 因此积分 (11) 也是这样. 在李群 G 为紧致的情形下, 总可以选取一个左不变 r- 形式 ω 使得

$$\int_G \omega = 1,$$

这样的 Haar 积分叫做**规范化的 Haar 积分**. 由上式以及 (12) 式,

$$1=\int_G \omega=\int_G \lambda(\sigma)\omega=\lambda(\sigma)\int_G \omega=\lambda(\sigma)$$

对每一 $\sigma\in G$ 皆成立, 因此我们有下列结论.

命题 4.2.1 每一个紧致李群皆为么模李群, 因而紧致李群上的 Haar 积分既是左不变的也是右不变的.

Haar 积分的左不变性和右不变性统称为**平移不变性**.

命题 4.2.2 设紧致李群 G 线性地作用在有限维实向量空间 V 上, 即假定 $\rho: G\to \mathrm{Aut}(V)$ 是 G 的一个线性表示, 并设 $<,>$ 是 V 上的内积, 那么在 V 上存在一个 G- 不变内积 $<,>_G$ 使得

$$<\rho(\tau)v,\ \rho(\tau)w>_G=<v,w>_G \tag{13}$$

对任意 $\tau\in G,\ v,\ w\in V$ 皆成立.

证明 利用 Haar 积分构造 V 上的一个 G- 不变内积 $<,>_G$. 令

$$<v,\ w>_G=\int_G<\rho(\sigma)v,\rho(\sigma)w>\mathrm{d}\sigma,\quad v,\ w\in V,$$

其中 $\mathrm{d}\sigma$ 表示把被积函数看作是 $\sigma\in G$ 的函数. 容易验证 $<,>_G$ 是双线性的并且是对称、正定的, 因而是 V 上的一个内积. 下证 $<,>_G$ 满足 (13) 式.

记被积函数 $<\rho(\sigma)v,\rho(\sigma)w>=f(\sigma)$, 作右平移 $f\circ r_\tau(\sigma)=f(\sigma\tau)=<\rho(\sigma\tau)v,\rho(\sigma\tau)w>=<\rho(\sigma)\rho(\tau)v,\ \rho(\sigma)\rho(\tau)w>$. 由于 Haar 积分具有右不变性, 故

$$\begin{aligned}<\rho(\tau)v,\ \rho(\tau)w>_G&=\int_G<\rho(\sigma)\rho(\tau)v,\ \rho(\sigma)\rho(\tau)w>\mathrm{d}\sigma\\&=\int_G<\rho(\sigma)v,\rho(\sigma)w>\mathrm{d}\sigma\\&=<v,w>_G\,.\end{aligned}$$

注 等式 (13) 说明 $\rho(\tau)$ 作为 V 的线性变换是保范数的, 因而是正交变换, 此时线性表示 ρ 叫做**正交表示**. 如果 V 是复内积空间, 命题结论仍然成立, 证明方法也完全类似. 在这种情形下, 线性表示 ρ 则称为**酉表示**.

4.3 映射度及积分表示

4.3.1 映射度的定义和性质

为引入映射度这一重要概念, 先作如下准备.

引理 4.3.1 设光滑流形 M 和 N 具有相同维数, 且 M 是紧致的. 若 $q \in N$ 是 C^∞ 映射 $f: M \to N$ 的正则值, 且 $f^{-1}(q) \neq \varnothing$, 则

(1) $f^{-1}(q)$ 是有限点集, 设为 $f^{-1}(q) = \{p_1, \cdots, p_k\}$,

(2) 存在点 q 在 N 中的开邻域 V, 使得 $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^k U_i$, 其中 U_i 是点 p_i 在 M 中的开邻域, $i = 1, \cdots, k$, 它们两两互不相交, 并且 $f|_{U_i}: U_i \to V$ 是 C^∞ 微分同胚.

证明 (1) 据定理 1.5.1, $f^{-1}(q)$ 是 M 的零维正则子流形, 因而是由一些孤立点组成. 但 $f^{-1}(q)$ 作为紧致空间 M 的闭子集是紧致的, 故 $f^{-1}(q)$ 是有限点集, 记为 $\{p_1, \cdots, p_k\}$.

(2) 因为 $\mathrm{Rank}_{p_i} f = \dim M = \dim N$, 根据反函数定理, 存在点 p_i 在 M 中的开邻域 W_i 和点 q 在 N 中的开邻域 V_i, 使得 $f|_{W_i}: W_i \to V_i$ 是 C^∞ 微分同胚, $i = 1, \cdots, k$. 如有必要, 适当缩小各 W_i, 使得这些 W_i 两两不相交. 易见 $f(M - \bigcup\limits_{i=1}^k W_i)$ 是 N 中的紧致子集且不含点 q, 所以

$$V = \bigcap_{i=1}^k V_i - f\left(M - \bigcup_{i=1}^k W_i\right)$$

是点 q 在 N 中的开邻域. 令 $U_i = W_i \bigcap f^{-1}(V), i = 1, \cdots, k$, 则 $f|_{U_i}: U_i \to V$ 是 C^∞ 微分同胚, 并且 $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{i=1}^k U_i$.

定义 4.3.1 设 M 和 N 为有向 n 维流形, 且 M 是紧致的, N 是连通的, 又设 $f: M \to N$ 为光滑映射. 若 $p \in M$ 是 f 的正则点, 则 $(\mathrm{d}f)_p: T_pM \to T_{f(p)}N$ 为有向向量空间之间的线性同构. 若该同构保持定向, 定义 $(\mathrm{d}f)_p$ 的符号为 $+1$, 记为 $\deg_p f = +1$, 称 p 为正类型点; 若 $(\mathrm{d}f)_p$ 反转定向, 定义 $(\mathrm{d}f)_p$ 的符号为 -1, 记为 $\deg_p f = -1$, 称 p 为负类型点. $\deg_p f$ 叫做 f 在点 p 处的**度数**.

假设 $q \in N$ 是 f 的正则值, 定义

$$\deg(f, q) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \deg_p f,$$

称为 **f 关于正则值 q 的 Brouwer 度**. 据引理 4.3.1(1), $f^{-1}(q)$ 是有限点集, 上式右边是有限和, 因而 $\deg(f, q)$ 是一个整数. 假若 $f^{-1}(q) = \varnothing$, 自然规定 $\deg(f, q) = 0$.

$\deg(f, q)$ 的几何意义: 如果 $f^{-1}(q)$ 包含 s 个正类型点和 r 个负类型点, 那么 $\deg(f, q) = s - r$(点数的代数和). 由引理 4.3.1(2) 知, $\deg(f, q)$ 反映了在映射 f 的作用下覆盖点 q 的开邻域 V 的次数的代数和.

引理 4.3.2 映射 f 关于正则值 q 的 Brouwer 度 $\deg(f, q)$ 是定义在流形 N 的稠密开子集 $N - f(C_f)$ 上的局部常值函数, 其中 C_f 表示 f 的全体临界点的集合.

证明 f 的正则点集 $M-C_f$ 显然是 M 的开子集, C_f 是紧致空间 M 的闭子集必为紧致子集, 所以 $f(C_f)$ 是 N 中的紧致子集也是闭子集, 从而 f 的全体正则值的集合 $N-f(C_f)$ 是 N 的开子集. 另外, 根据推论 1.6.3, $N-f(C_f)$ 在 N 中处处稠密. 于是 $N-f(C_f)$ 是 N 中的一个稠密开子集.

由引理 4.3.1(2) 可知, 在点 q 的开邻域 V 内任取点 q', 必有 $\deg(f,q')=\deg(f,q)$, 因此 $\deg(f,q)$ 作为正则值 q 的函数是局部常值的.

命题 4.3.1 Brouwer 度 $\deg(f,q)$ 不依赖于正则值 q 的选取.

证明概要 由引理 4.3.2 知, 对充分接近于 q 的正则值, 结论成立.

设 q_0 和 q_1 是 f 的两个不同的正则值. 在流形 N 中用一条自身不相交且每点都具有非零切向量的光滑道路连接点 q_0 和 q_1. 这条道路本身是一个 1 维带边流形 L, 并且还可以选取 L 使得映射 f 在整个 L 上是横截正则的且在端点 q_0, q_1 是正则的. L 的完全原像 $f^{-1}(L)$ 是 M 中一个光滑 1 维带边流形, 边界由两部分 $f^{-1}(q_0)$ 和 $f^{-1}(q_1)$ 组成, 见图 4.5, 这里维数 $n=2$, 点 $\{p_{i0}\}$ 是 q_0 的原像, 点 $\{p_{i1}\}$ 是 q_1 的原像. 图中每个点的附近标有符号以反映它是正类型还是负类型. 另外, L 上不同点的原像点的个数可能不同.

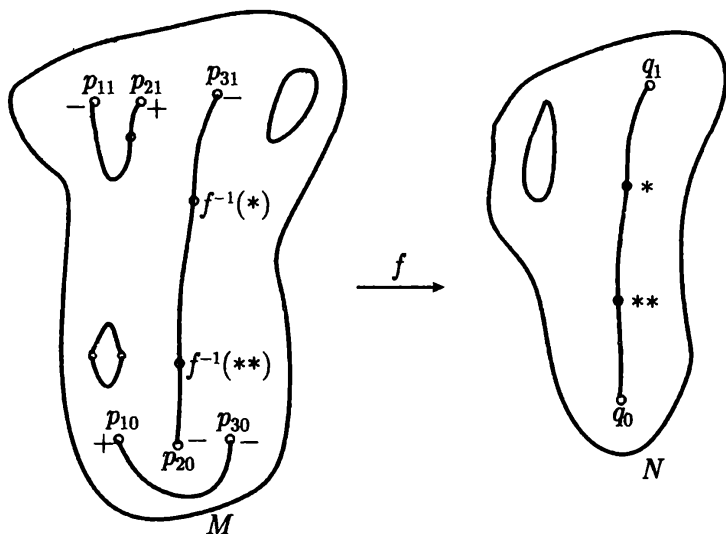


图 4.5

如果原像 $f^{-1}(q_0)$(或 $f^{-1}(q_1)$) 的两个点是 $f^{-1}(L)$ 的一条连通曲线段的两个端点, 例如图 4.5 中的点 p_{10} 和 p_{30}. 由于受 M 和 N 定向的制约, 这两个点符号相反, 即一个是正类型点, 另一个是负类型点. 如果 $f^{-1}(L)$ 中一条连通曲线段连接的是 $f^{-1}(q_0)$ 中的点和 $f^{-1}(q_1)$ 中的点, 如图 4.5 中的点 p_{20} 和 p_{31}, 则这两个点的符号相同, 属于同一类型.

定义 4.3.2 设 M 是 n 维紧致有向流形, N 是 n 维连通有向流形, $f: M\to N$ 为光滑映射. 由命题 4.3.1 知, 整数 $\deg(f,q)$ 不依赖于正则值 q 的选取, 我们把这个整数叫做 f 的 **Brouwer 度**, 记作 $\deg(f)$.

映射度具有下列基本性质.

命题 4.3.2　设 M, N 和 P 是具有相同维数的有向流形, 并且 M 和 N 紧致, N 和 P 连通.

(1) 若 $f: M \to N$ 与 $g: N \to P$ 为光滑映射, 则 $\deg(g \circ f) = \deg(g) \cdot \deg(f)$,

(2) 若 $id: M \to M$ 为恒同映射, 则 $\deg(id) = 1$,

(3) 若 $f: M \to N$ 是微分同胚, 则 $\deg(f) = \pm 1$.

(4) (Brouwer 度的同伦不变性) 若 $f, g: M \to N$ 为 C^∞ 映射, 且 f 同伦于 g, 则 $\deg(f) = \deg(g)$.

证明留作练习.

例 1　设 S^n 为 n 维单位球面, $n \geqslant 1$. 反射 $r_i: S^n \to S^n$ 定义为 $r_i(x_1, \cdots, x_{n+1}) = (x_1, \cdots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{n+1})$, $i = 1, \cdots, n+1$. 易见它是反转定向的微分同胚, 故 $\deg(r_i) = -1$.

对径映射 $r: S^n \to S^n$ 定义为 $r(x) = -x$, 它是 $n+1$ 个反射的复合, 即 $r = r_1 \circ r_2 \circ \cdots \circ r_{n+1}$, 因此

$$\deg(r) = \deg(r_1) \cdots \deg(r_{n+1}) = (-1)^{n+1}.$$

当 n 为偶数时, $\deg(r) = -1$, 故 S^n 的对径映射不同伦于恒同映射.

例 2　S^n 上容许有非零的光滑切向量场当且仅当 n 为奇数.

证明　$\Rightarrow$ 若 S^n 上有一个处处非零的光滑切向量场 X, 则由

$$F(x, \theta) = x\cos\pi\theta + \frac{X(x)}{\|X(x)\|}\sin\pi\theta$$

定义的 $F: S^n \times [0,1] \to S^n$ 是连接 $F(x,0) = x = id_{S^n}(x)$ 与 $F(x,1) = -x = r(x)$ 的同伦. 由 Brouwer 度的同伦不变性知,

$$1 = \deg(id_{S^n}) = \deg(r) = (-1)^{n+1},$$

所以 n 必为奇数.

$\Leftarrow$ 设 $n = 2m-1$. 令

$$X(x_1, \cdots, x_{2m}) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \cdots, x_{2m}, -x_{2m-1}),$$

因 $< x, X(x) > = 0$, 故 $X(x)$ 为点 $x \in S^n$ 处的切向量. 显然 X 是 S^n 上光滑的单位切向量场.

4.3.2　映射度的积分表示

引理 4.3.3　设 ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上有紧致支集的光滑 n 次外微分形式且 $\mathrm{Supp}\omega \subset U$, 其中 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集, 不妨假定 U 是中心在原点的开立方体 $C_n =$

$\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\big||x_i|<c,\ i=1,\cdots,n\}$(图 4.6). 若 $\int_{C_n}\omega=0$, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上有紧致支集的 $n-1$ 次外微分形式 τ, 使得 $\mathrm{Supp}\tau\subset C_n$ 并且 $\omega=\mathrm{d}\tau$.

注 由于外微分形式 ω 是 n 次的, 必有 $\mathrm{d}\omega=0$. 由 Poincaré引理知, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的 $n-1$ 次外微分形式 τ 使得 $\omega=\mathrm{d}\tau$. 但不知道是否有 $\mathrm{Supp}\tau\subset C_n$? 此外, 条件 $\int_{C_n}\omega=0$ 是必要的, 理由如下: 如果 τ 使得 $\mathrm{d}\tau=\omega$, 且 $\mathrm{Supp}\tau\subset C_n$, 则 $\mathrm{Supp}\tau\bigcap\partial\overline{C}_n=\varnothing$. 而 $\mathrm{Supp}\omega\subset C_n$, 故 $\int_{C_n}\omega=\int_{\overline{C}_n}\omega$. 利用斯托克斯定理, 这一积分等于

$$\int_{\overline{C}_n}\mathrm{d}\tau=\int_{\partial\overline{C}_n}\tau=0.$$

引理 4.3.3 的证明 对维数 n 使用归纳证明. 当 $n=1$ 时, $C_1=(-c,c)$,$\mathbb{R}^1$ 上的 1- 形式 ω 的支集包含在 $(-c,c)$ 内, 设为 $\omega=f(x)\mathrm{d}x$, 其中 $f\in C^\infty(\mathbb{R}^1)$. f 的支集是含于 $(-c,c)$ 的闭集, 设 $\mathrm{Supp}f\subset[a,b]$, 这里 $-c<a\leqslant b<c$. 令

$$g(x)=\int_{-c}^{x}f(t)\mathrm{d}t.$$

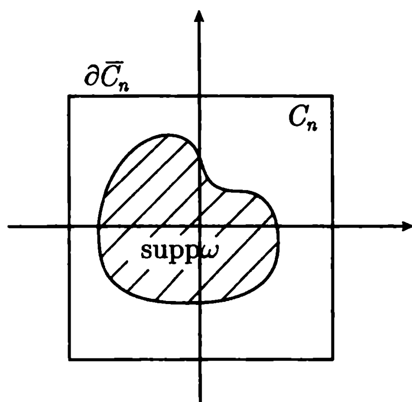


图 4.6

当 $x\leqslant a$ 时, $g(x)=0$; 当 $x\geqslant b$ 时, $g(x)=\int_{-c}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-c}^{b}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-c}^{c}f(t)\mathrm{d}t=0$. 由此可见 g 对所有 $x\in\mathbb{R}$ 均有定义且 $\mathrm{Supp}g\subset[a,b]\subset(-c,c)$. 又 $g'(x)=f(x)$, 因此 $g\in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\omega=\mathrm{d}g$.

假设 $n=k-1$ 时结论成立, 考虑 $n=k$ 的情形. 将 $\mathbb{R}^k$ 上具有紧致支集的 k-形式 ω 写为

$$\omega=f(x',x_k)\mathrm{d}x'\wedge\mathrm{d}x_k,$$

这里 $x'=(x_1,\cdots,x_{k-1})$, $\mathrm{d}x'=\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{k-1}$, $f\in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ 且 $\mathrm{Supp}f\subset C_k$, 然后定义

$$g(x')=\int_{-c}^{c}f(x',x_k)\mathrm{d}x_k,\quad \rho=g(x')\mathrm{d}x'.$$

不难看出 $g\in C^\infty(\mathbb{R}^{k-1})$, $\mathrm{Supp}g\subset C_{k-1}$, 因而 ρ 是 $\mathbb{R}^{k-1}$ 上有紧致支集的 $k-1$ 次形式, $\mathrm{Supp}\rho\subset C_{k-1}$. 又 ρ 满足条件

$$\int_{C_{k-1}}\rho=\int_{C_{k-1}}g(x')\mathrm{d}x'=\int_{C_{k-1}}\mathrm{d}x'\int_{-c}^{c}f(x',x_k)\mathrm{d}x_k=\int_{C_k}\omega=0.$$

根据归纳假设, 存在 $\mathbb{R}^{k-1}$ 上 $(k-2)$- 形式 γ 具有紧致支集, 使得 $\rho = \mathrm{d}\gamma$ 并且 $\mathrm{Supp}\gamma \subset C_{k-1}$. 现将 γ 写为

$$\gamma = \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i-1}\tilde{h}_i(x')\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{k-1},$$

于是

$$g(x')\mathrm{d}x' = \rho = \mathrm{d}\gamma = \left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial \tilde{h}_i}{\partial x_i}(x')\right)\mathrm{d}x'.$$

选取 $\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ 使得 $\mathrm{Supp}\lambda \subset (-c, c)$ 并且 $\int_{-c}^{c}\lambda(t)\mathrm{d}t = 1$. 令

$$h_k(x', x_k) = \int_{-c}^{x_k}[f(x', t) - g(x')\lambda(t)]\mathrm{d}t,$$

读者不难验证 $h_k \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ 具有紧致支集 $\mathrm{Supp}h_k \subset C_k$, 又

$$\frac{\partial h_k}{\partial x_k}(x', x_k) = f(x', x_k) - g(x')\lambda(x_k),$$

因而

$$f(x', x_k) = g(x')\lambda(x_k) + \frac{\partial h_k}{\partial x_k}(x', x_k) = \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\partial \tilde{h}_i}{\partial x_i}(x')\cdot\lambda(x_k) + \frac{\partial h_k}{\partial x_k}(x', x_k).$$

记 $h_i(x', x_k) = \tilde{h}_i(x')\lambda(x_k)$, $i = 1, \cdots, k-1$, 则上式可表为 $f(x', x_k) = \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial h_i}{\partial x_i}(x', x_k)$, 于是

$$\omega = f(x', x_k)\mathrm{d}x' \wedge \mathrm{d}x_k = \left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial h_i}{\partial x_i}(x', x_k)\right)\mathrm{d}x' \wedge \mathrm{d}x_k.$$

令

$$\tau = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}h_i(x_1, \cdots, x_k)\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x_i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_k,$$

显然 τ 是 $\mathbb{R}^k$ 上的 $(k-1)$- 形式, 其紧致支集 $\mathrm{Supp}\tau$ 包含于 C_k, 并且 $\mathrm{d}\tau = \omega$. 这样便完成了归纳证明.

命题 4.3.3 设 M 和 N 是 n 维有向流形, 且 M 紧致, N 连通. 又设 (U, φ) 是 N 中以点 q 为中心的局部立方坐标卡 (此时 $\varphi(U)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为中心的开立方体且 $\varphi(q) = 0$), ω 为 N 上有紧致支集的 n 次微分形式且 $\mathrm{Supp}\omega \subset U$. 若

$$\int_N \omega = 0,$$

则对任意 C^∞ 映射 $f: M \to N$, 都有

$$\int_M f^*\omega = 0.$$

证明 由引理 4.3.3 可推得: 存在 U 上的 $(n-1)$- 形式 τ 使得 $\omega = \mathrm{d}\tau$ 并且紧致支集 $\mathrm{Supp}\tau \subset U$, 从而 $\mathrm{Supp}(f^*\omega) \subset f^{-1}(U)$, $\mathrm{Supp}(f^*\tau) \subset f^{-1}(U)$, 并且

$$\int_M f^*\omega = \int_{f^{-1}(U)} f^*\omega = \int_{f^{-1}(U)} f^*\mathrm{d}\tau = \int_{f^{-1}(U)} \mathrm{d}(f^*\tau) = \int_M \mathrm{d}(f^*\tau) = \int_{\partial M} f^*\tau = 0.$$

推论 4.3.1 设 $M, N, (U, \varphi)$ 和 f 如命题 4.3.3 中所述, 又设 ω_1 和 ω_2 为 N 上有紧致支集的 n 次微分形式, 且它们的支集均包含于 U 中. 如果

$$\int_N \omega_1 = \int_N \omega_2,$$

那么

$$\int_M f^*\omega_1 = \int_M f^*\omega_2.$$

定理 4.3.1 设 M, N 是两个 n 维的有向流形, 且 M 紧致, N 连通. 又设 (U, φ) 是 N 中的局部立方坐标卡, ω 为 N 上有紧致支集的 n 次外微分形式且 $\mathrm{Supp}\omega \subset U$. 假定 $f: M \to N$ 为光滑映射, 那么

$$\int_M f^*\omega = \deg(f) \int_N \omega.$$

证明 由引理 4.3.2 知, f 的正则值集是 N 的稠密开子集, 因此在 U 中任取 f 的一个正则值 q. 据引理 4.3.1, 若 $f^{-1}(q) \neq \varnothing$, 则 $f^{-1}(q)$ 是有限点集, 设

$$f^{-1}(q) = \{p_1, \cdots, p_k\},$$

并且存在点 q 在 N 中的连通开邻域 $V \subset U$ 和点 p_i 在 M 中的开邻域 $U_i, i = 1, \cdots, k$, 使得当 $i \neq j$ 时, $U_i \bigcap U_j = \varnothing$, $f|_{U_i}: U_i \to V$ 是 C^∞ 微分同胚并且 $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{k} U_i$(见图 4.7).

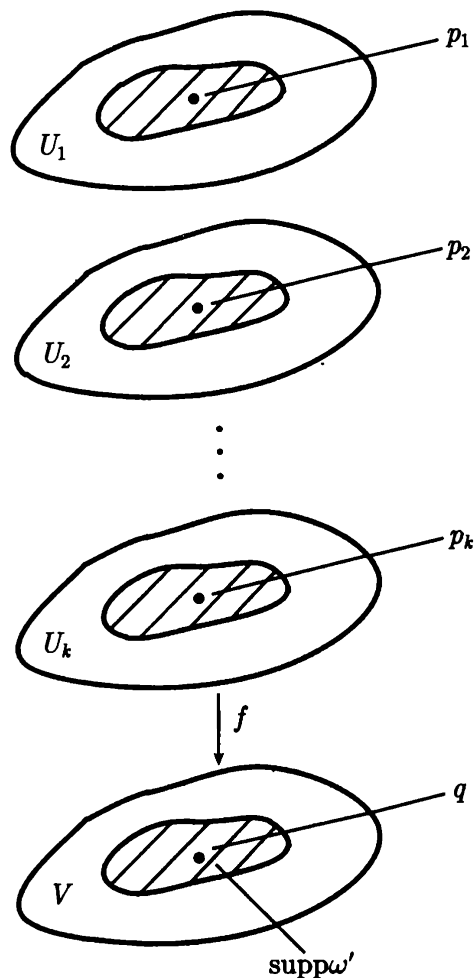


图 4.7

选取 N 上的一个 n 次外微分形式 ω', 要求 ω' 的紧致支集 $\mathrm{Supp}\omega'$ 包含在 V 中, 并且满足条件

$$\int_N \omega' = \int_N \omega.$$

显然 $\mathrm{Supp}f^*\omega' \subset f^{-1}(V)$. 由推论 4.3.1,

$$\int_M f^*\omega = \int_M f^*\omega' = \sum_{i=1}^k \int_{U_i} (f|U_i)^*\omega'. \tag{1}$$

由于 $f|_{U_i}$ 是从 M 的开子集 U_i 到 N 的连通开子集 V 上的微分同胚, 所以 $f|_{U_i}$ 保持或反转由 M, N 的定向所诱导的 U_i, V 的定向, 而这取决于微分 $(\mathrm{d}f)_{p_i}$, 从而只依赖于点 p_i. 记

$$\deg_{p_i} f = \begin{cases} 1, & \text{若}(\mathrm{d}f)_{p_i}\text{保持定向}, \\ -1, & \text{若}(\mathrm{d}f)_{p_i}\text{反转定向}, \end{cases}$$

则有

$$\int_{U_i} (f|_{U_i})^*\omega' = (\deg_{p_i} f) \int_V \omega' = (\deg_{p_i} f) \int_N \omega' = (\deg_{p_i} f) \int_N \omega,$$

$i = 1, \cdots, k$, 从而 (1) 式可写为

$$\int_M f^*\omega = \sum_{i=1}^k (\deg_{p_i} f) \int_N \omega = \deg(f) \int_N \omega.$$

如果 $f^{-1}(q) = \varnothing$, 则存在点 q 在 N 中的开邻域 V 使得 $f^{-1}(V) = \varnothing$. 对于支集在 V 内并且使得 $\int_N \omega \neq 0$ 的 ω, 有 $\int_M f^*\omega = \int_M 0 = 0$, 由此得 $\deg(f) = 0$.

利用单位分解的技巧, 还可以把定理 4.3.1 拓宽为下列定理.

定理 4.3.2　设 M 是 n 维紧致有向流形, N 是 n 维连通有向流形, ω 是 N 上有紧致支集的 n 次外微分形式. 那么对于任意 C^∞ 映射 $f: M \to N$, 有

$$\int_M f^*\omega = \deg(f) \int_N \omega.$$

证明留作练习.

引入映射度的一个基本目标是研究具有相同维数的有向流形 M 与 N 之间的映射同伦类, 特别是当 N 为球面的情形. 著名的 Hopf 定理指出: n 维紧致、连通的有向流形到 n 维球面 S^n 的两个光滑映射是同伦的当且仅当它们有相同的 Brouwer 度. 在文献 [3] 中还证明了一个蕴涵 Hopf 定理的更一般结果, 该结果应用 Pontryagin 给出的标架式协边理论的语言来描述. 在文献 [18] 及 [19] 中各辟一章介绍映射度理论, 包含许多很有意思的有趣应用, 感兴趣的读者请参阅.

4.4　斯托克斯定理的应用举例

本节材料取自文献 [18].

命题 4.4.1 设 M 是 m 维紧致有向流形, 则对所有 $m-1$ 次外微分形式 ω, 均有

$$\int_M \mathrm{d}\omega = 0.$$

事实上, 若将 M 看作带边区域, 则其边界为空集.

推论 4.4.1 设 M 是 m 维可定向紧致流形, 则第 m 个 de Rham 上同调群 $H_{\mathrm{d}}^m(M,\mathbb{R})$ 的维数大于或等于 1.

这是因为若 ω 是 M 的一个体积形式, 则 $\int_M \mathrm{d}\omega > 0$, 因此不存在任何 $m-1$ 次微分形式 τ 使得 $w = \mathrm{d}\tau$.

推论 4.4.2 球面 S^{r+s}(整数 r, s 不小于 1) 不微分同胚于 $X \times Y$, 其中 X 和 Y 是维数分别为 r 和 s 的有向流形.

证明 反设 S^{r+s} 微分同胚于 $X \times Y$. 因球面 $S^{r+s}(r \geqslant 1, s \geqslant 1)$ 的第 r 个 de Rham 上同调群 $H_{\mathrm{d}}^r(S^{r+s},\mathbb{R}) = \{0\}$(见 5.2 节例 1), 故 $H_{\mathrm{d}}^r(X \times Y,\mathbb{R}) = \{0\}$. 这样一来将引出矛盾.

现设 $p : X \times Y \to X$, $(x, y) \mapsto x$ 为投影, ω 是有向流形 X 的一个体积形式. 依假定 X 和 Y 为有向流形, 故 $X \times Y$ 亦可定向 (见习题 4 第 1 题). 对于固定的 $y \in Y$, $p|_{X\times\{y\}} : X \times \{y\} \to X$ 是一个保持定向的微分同胚 ($X \times Y$ 被适当定向), 因此

$$0 < \int_X \omega = \int_{X\times\{y\}} p^*\omega\Big|_{X\times\{y\}}. \tag{1}$$

而 ω 是 r 维有向流形 X 的 r 次微分形式, 故 $\mathrm{d}\omega = 0$, 于是

$$\mathrm{d}(p^*\omega) = p^*(\mathrm{d}\omega) = 0.$$

因 $H_{\mathrm{d}}^r(X \times Y,\mathbb{R}) = \{0\}$, 因此存在 $X \times Y$ 上的 $r-1$ 次微分形式 τ, 使得 $p^*\omega = \mathrm{d}\tau$. 注意到 S^{r+s} 是紧致的, $X \times Y$ 必紧致, 从而 X 及 $X \times \{y\}$ 也是紧致的. 据命题 4.4.1,

$$\int_{X\times\{y\}} p^*\omega|_{X\times\{y\}} = \int_{X\times\{y\}} \mathrm{d}\left(\tau|_{X\times\{y\}}\right) = 0. \tag{2}$$

(1) 式与 (2) 式矛盾说明 S^{r+s} 与 $X \times Y$ 不可能微分同胚, 这样便证明了球面和两个流形的乘积的不可微同胚性.

命题 4.4.2(非收缩引理) 设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个非空紧致带边区域, V 是 D 的开邻域, 即 V 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集且 $V \supset D$. 假定 $f : V \to \partial D$ 是光滑映射, 那么 $f\Big|_{\partial D} \neq i\mathrm{d}_{\partial D}$($\partial D$ 上的恒同映射).

证明 记 $\mathbb{R}^n$ 中点的坐标为 $x_1, \cdots, x_n$. 令 $i : \partial D \to \mathbb{R}^n$ 为包含映射, $f_1, \cdots, f_n$ 为 f 的分量, 即 $f = (f_1, \cdots, f_n)$. 引入积分

$$\int_{\partial D} i^*(x_1\mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n) \text{和} \int_{\partial D} i^*(f_1\mathrm{d}f_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_n).$$

假若 $f|_{\partial D} = i\mathrm{d}_{\partial D}$, 那么 $f_j|_{\partial D} = x_j|_{\partial D}$, $j = 1, \cdots, n$, 从而上面两个积分值相等. 应用斯托克斯定理便得到

$$\int_D \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n = \int_D \mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}f_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_n. \tag{3}$$

等式 (3) 的左边表示 D 的体积, 因而 $\int_D \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n > 0$. 但依据假设, f 的值落在 ∂D 内, 因此对于 $p \in V$, 有

$$\mathrm{d}f_j(p) = f^*(\mathrm{d}x_j)(p) \in T^*_{f(p)}(\partial D),\ j = 1, \cdots, n,$$

其中 $T^*_{f(p)}(\partial D)$ 是 $n-1$ 维切空间 $T_{f(p)}(\partial D)$ 的对偶空间. n 个 1 次微分形式 $\mathrm{d}f_1, \cdots, \mathrm{d}f_n$ 在点 $p \in V$ 的值落在同一个 $n-1$ 维向量空间里必定线性相关. 而 $p \in V$ 是任取的, 故 $\mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}f_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_n = 0$, 从而

$$\int_D \mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}f_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_n = 0,$$

即 (3) 式右边的值为 0, 这便产生了矛盾, 因此 $f|_{\partial D} \neq i\mathrm{d}_{\partial D}$.

本命题的直观解释是一片富有弹性的平面薄膜不可能收缩到它的边界上而不撕破任何部分. 学过代数拓扑学的读者知道, 由这非收缩引理立即可推出著名的 n 维 Brouwer 不动点定理. 此外, 命题的条件还可以削弱, 例如 f 属于 C^1 类映射亦可.

在介绍平面向量场的不动点定理之前, 先陈述下面的事实以作准备. 设 $L \subset M$ 是 M 的一个 l 维子流形, ω 是 M 上的一个 r 次微分形式, 那么当 $r > l$ 时就有 $\omega|_L = 0$. 这是因为: 若 V, W 是两个实向量空间, $h: V \to W$ 为线性映射, 又 $\xi \in \Lambda^r(W^*)$, 则当 $r > \dim V$ 时, $h^*\xi = 0$.

命题 4.4.3　记 $D = \overline{B}(0,1)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中以原点为心的单位圆盘, $S^1 = \partial D$, U 为包含 D 的开集. 设 $X \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$ 是一个平面向量场, 满足下列条件: 对所有 $x \in S^1$, $X(x) = \lambda x$, 其中实数 $\lambda < 0$, 那么存在点 $y \in D$ 使得 $X(y) = 0$(见图 4.8).

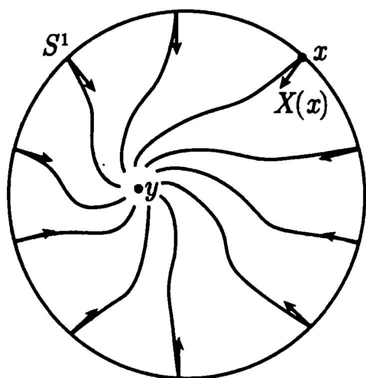


图 4.8

证明　反设对每一 $x \in D$, $X(x) \neq 0$. 将它单位化, 令 $Y: U \to S^1$ 定义为

$$Y(x) = \frac{X(x)}{\|X(x)\|},$$

显然 $Y \in C^\infty(U, \mathbb{R}^2)$.

设 σ 是 S^1 上的体积形式, 则 $Y^*\sigma$ 是 U 上的 1 次微分形式. 应用斯托克斯定理, 得

$$\int_{\partial D}(Y^*\sigma)|_{\partial D}=\int_D \mathrm{d}\left(Y^*\sigma|_{\partial D}\right)=\int_D Y^*\left(\mathrm{d}\sigma|_{\partial D}\right).$$

$\mathrm{d}\sigma$ 是 2 次微分形式, 而 $\partial D=S^1$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的 1 维子流形, 故 $\mathrm{d}\sigma|_{\partial D}=0$, 从而上述积分值为 0. 另一方面, Y 在 $S^1=\partial D$ 上的限制 $Y|_{S^1}:S^1\to S^1$ 是对径映射 $x\mapsto -x$, 它是一个保持 S^1 定向的微分同胚, 因此

$$\int_{S^1}Y^*\sigma=\int_{S^1}\sigma>0.$$

这便导致了矛盾, 命题得证.

命题中条件: 对每一 $x\in S^1$, 存在 $\lambda<0$ 使得 $X(x)=\lambda x$ 表示在 S^1 上的所有点, 向量场 X 沿法向量进入 D 内. 如果考虑场 X 的积分曲线, 本命题说明这些积分曲线收敛到 D 的一个点. 说得严谨些, 沿着 X 的这些积分曲线, 定义一个从 D 到其自身的严格收缩, 必然停留在某个部分.

命题 4.4.4 设 $D=\overline{B}(0,1)\subset\mathbb{R}^2$, $S^1=\partial D$, U 为 D 的开邻域, E 是从 D 去掉 q 个开圆盘 $D_i(1\leqslant i\leqslant q)$ 后得到的带边区域, 这些开圆盘两两不交. 假定 $X\in C^\infty(U,\mathbb{R}^2)$ 为平面向量场, 并且 X 在 ∂E 上是沿法向量进入 E 的, 那么当 $q>1$ 时, 存在 $y\in E$ 使得 $X(y)=0$.

注 X 在 ∂E 上沿法向量进入 E, 指的是对每一 $x\in S^1$, 存在 $\lambda(x)<0$ 使得 $X(x)=\lambda(x)\cdot x$; 而对于每个 $\partial D_i(i=1,\cdots,q)$, 在 ∂D_i 上任取点 x, 则有 $\lambda(x)>0$ 使得 $X(x)=\lambda(x)\cdot(x-x_i)$, 这里 x_i 是 D_i 的圆心. 见图 4.9(a).

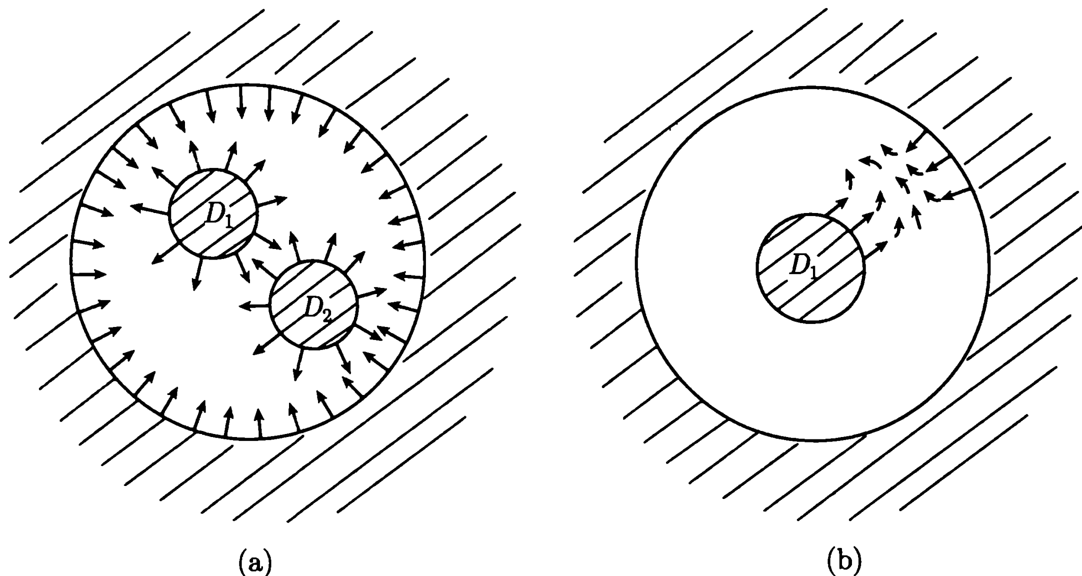


图 4.9

证明　如命题 4.4.3 那样进行. 假设命题结论不真, 令 $Y: U \to S^1$ 为 $Y(x) = \dfrac{X(x)}{\|X(x)\|}$. $\partial E = S^1 \bigcup \left(\bigcup\limits_{i=1}^{q} \partial D_i \right)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中 1 维不连通子流形, 有 $q+1$ 个连通分支. 令 σ 是 S^1 上的体积形式, 则 $Y^*\sigma$ 是 U 上的 1 次形式. 应用斯托克斯定理, 得

$$\int_{\partial E} (Y^*\sigma)|_{\partial E} = \int_E \mathrm{d}\left(Y^*\sigma|_{\partial E}\right) = \int_E Y^*\left(\mathrm{d}\sigma|_{\partial E}\right) = 0,$$

这是因为 $\mathrm{d}\sigma|_{\partial E} = 0$. 又

$$\int_{\partial E} (Y^*\sigma)|_{\partial E} = \int_{S^1} Y^*\sigma + \sum_{i=1}^{q} \int_{\partial D_i} Y^*\sigma,$$

而 $Y\Big|_{S^1}: S^1 \to S^1$ 是保持定向的微分同胚, $Y\Big|_{\partial D_i}: \partial D_i \to S^1$ 是反转定向的微分同胚, 因此 $\displaystyle\int_{S^1} Y^*\sigma = \int_{S^1} \sigma > 0$, $\displaystyle\int_{\partial D_i} Y^*\sigma = -\int_{S^1} \sigma$, 于是

$$0 = (1-q)\int_{S^1} \sigma,$$

当 $q \neq 1$ 时便产生了矛盾.

注　(1) 对于 $q=1$, 结果不真. 图 4.9(b) 给出构造反例的示意图.

(2) 在命题 4.4.3 和 4.4.4 中对于向量场 X 的要求可以削弱, 例如降低为属于 C^1 类.

习　题　4

1. 证明两个光滑流形 M 和 N 的乘积 $M \times N$ 是可定向的, 当且仅当 M 和 N 是可定向的.

2. 设 $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ 是 C^∞ 淹没, 证明流形 $f^{-1}(0)$ 是可定向的.

3. 将平面 $\mathbb{R}^2$ 上以原点为心的单位圆盘记为 $\overline{B}(0,1)$, 把它的边界 S^1 上的对径点粘合起来便得到射影平面 RP^2. 证明 RP^2 是不可定向的.

4. 试证 $F = -id_{\mathbb{R}^{n+1}}|_{S^n}$ 保持 n 维球面 S^n 定向当且仅当 n 为奇数.

5. 在 $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ 中, 令

$$\omega = \frac{x_1 \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 - x_2 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + x_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}},$$

证明 ω 是闭形式. 并计算 $\displaystyle\int_{S^2} \omega$, 其中 S^2 表 2 维单位球面, 然后证明 ω 不是恰当形式.

6. 设 $D = [0,1] \times [0,1]$, $f: D \to \mathbb{R}^3$ 定义为 $f(u,v) = (u, v, u^2 + v^2 + 1)$, 又 $\omega = y\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + xz\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的 2 次微分形式, 求积分 $\displaystyle\int_D f^*\omega$.

7. 记 M^- 为和 M 定向相反的有向流形, 证明 $\displaystyle\int_{M^-} \omega = -\int_M \omega$.

8. 设 M 和 N 为 n 维有向流形, $f: M \to N$ 为微分同胚. 假定 ω 是 N 上有紧致支集的 n 次微分形式, 证明

$$\int_M f^*\omega = \pm \int_N \omega.$$

其中正负号由微分同胚是保持定向还是反转定向而定.

9. 设 D 为 $\mathbb{R}^2$ 中的一个紧致带边区域, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为 C^∞ 函数满足 $f|_{\partial D} = 0$. 证明公式

$$\int_D f\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\int_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

进而推出: 若在 D 上有 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, 则 $f|_D = 0$.

10. 设 M 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个 $(k+l+1)$ 维可定向的紧致子流形, ω 和 τ 分别是定义在 $\mathbb{R}^n$ 中包含 M 在内的一个开子集上的 k 次和 l 次外微分形式. 证明: 存在某个实数 a 使得

$$\int_M \omega \wedge \mathrm{d}\tau = a\int_M \mathrm{d}\omega \wedge \tau,$$

并确定 a 的值.

11. 完成证明在黎曼流形上存在局部规范正交标架场的细节.

12. 设 ω 是 m 维有向黎曼流形 M 的体积形式. 令 $X_1, \cdots, X_m$ 和 $Y_1, \cdots, Y_m$ 是 M 上的向量场, 证明

$$\omega(X_1, \cdots, X_m) \cdot \omega(Y_1, \cdots, Y_m) = \det(\langle X_i, Y_j \rangle).$$

13. 设 G 为紧致李群, 并且对于 $\sigma \in G$, 令 $\alpha(\sigma) = \sigma^{-1}$. 证明: 对于 G 上的每一个连续函数 f, 有

$$\int_G f = \int_G f \circ \alpha.$$

14. 设 $f: S^1 \to S^1$ 定义为 $f(\mathrm{e}^{i\theta}) = \mathrm{e}^{ik\theta}$, k 为整数, 求 $\deg(f)$.

15. 证明命题 4.3.2.

16. 证明定理 4.3.2.

17. 设 M 为 m 维紧致有向流形, $f, g: M \to S^m$ 为 C^∞ 映射. 证明: 如果

$$\|f(p) - g(p)\| < 2, \text{对每一} p \in M,$$

那么 f 同伦于 g.

18. 设 $f: S^m \to S^m$ 为 C^∞ 映射, 且 $\deg(f) \neq (-1)^{m+1}$, 证明 f 至少有一个不动点.

19. 设 $f: S^m \to S^m$ 为 C^∞ 映射, 且 $\deg(f)$ 为奇数, 证明 f 必将某一对对径点变为一对对径点, 即存在 $x_0 \in S^m$ 使得 $f(-x_0) = -f(x_0)$.

20. 记 $\overline{B}(0,1)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为心的单位球体, U 是 $\overline{B}(0,1)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的一个开邻域. 假设 C^∞ 映射 $g: U \to \mathbb{R}^n$ 使得 $g(\overline{B}(0,1)) \subset \overline{B}(0,1)$, 证明 g 在 $\overline{B}(0,1)$ 内至少有一个不动点.

提示: 利用命题 4.4.2 证明上述 Brouwer 不动点定理.

第 5 章　de Rham 定理和 Hodge 定理

本章的目标是证明两个深刻结果：de Rham 同构定理和 Hodge 定理. 前者的一个简洁证明要用到层 (sheaf) 论知识, 利用层的上同调理论可导出 de Rham 定理的最一般形式. 然而本书援用文献 [2], 在 5.2 节给出了它的初等详细证明, 即在流形可光滑单纯剖分的前提下, 证明了流形的 de Rham 上同调群同构于它的单纯上同调群. 5.1 节介绍必要的单纯同调知识是为那些不了解这方面内容的读者准备的. 5.3 节考虑可定向的紧致黎曼流形 M, 首先引入作用在 M 的微分形式上的算子 Δ, 它是大家所熟悉的拉普拉斯算子的推广. 满足方程 $\Delta\omega = 0$ 的微分形式叫做调和形式. Hodge 定理告诉我们, M 上的 de Rham 上同调群的每一个上同调类包含唯一的调和形式. 作为它的一个应用, 可导出 M 的 de Rham 上同调的 Poincare 对偶. 由 Hodge 分解定理还可推出方程 $\Delta\omega = \alpha$ 在 M 上有 p- 形式解当且仅当 p- 形式 α 正交于 M 上的调和 p- 形式所成的空间. 本章讨论的内容涉及到流形的拓扑、几何与分析, 从一个方面反映出数学各分支间的相互联系与相互渗透, 体现出数学的统一性.

5.1　单 纯 同 调

5.1.1　单纯复形

令 W 是实向量空间 V 的一个子空间. 所谓 V 的**仿射子空间** A 是 V 的一个子集, 其形状如下：

$$A = x_0 + W = \{x_0 + w | x_0 \in V, w \in W\},$$

即 A 是由子空间 W 经平移：$W \to V, w \mapsto x_0 + w$ 而得到. A 的**维数**定义为 W 的维数.

定义 5.1.1　设 $\{x_0, x_1, \cdots, x_k\}$ 是仿射子空间 A 中的点组. 若向量组 $\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \cdots, x_k - x_0\}$ 线性无关, 我们说点组 $\{x_0, x_1, \cdots, x_k\}$**处于一般位置或说仿射无关**.

注意, 这个定义不依赖于点 x_0 的选取. A 中的点 x 可以表示为"仿射基" $\{x_0, x_1, \cdots, x_k\}$ 的仿射组合. 事实上, 设 $\{w_1, \cdots, w_k\}$ 是 W 的一个基, 则

$$x = x_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i = x_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x_i - x_0) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i,$$

其中 $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$, 因而 $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$.

例如, 当 $x_1 \neq x_0$ 时, $\{x_0, x_1\}$ 是仿射无关的, 这时过点 x_0, x_1 的 (仿射) 直线是

$$l = \{\lambda_0 x_0 + (1 - \lambda_0) x_1 | \lambda_0 \in \mathbb{R}\}.$$

如果考虑线段 $\overline{x_0 x_1}$, 可以限制 λ_0 在 0 与 1 之间, 即 $0 \leqslant \lambda_0 \leqslant 1$. 更一般地, 我们有

定义 5.1.2 设 V 为实向量空间, 点组 $\{x_0, x_1, \cdots, x_k\}$ 在 V 中处于一般位置, 则子集

$$\left\{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i \middle| \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1, 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1, i = 0, 1, \cdots, k \right\}$$

叫做一个 k 维 (闭)**单形**, 简称为 ***k*- 单形**, 记作 $[x_0, x_1, \cdots, x_k]$. 点 $x_i (i = 0, 1, \cdots, k)$ 叫做该单形的**顶点**. 而子集

$$\left\{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i \middle| \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1, 0 < \lambda_i < 1, i = 0, 1, \cdots, k \right\}$$

叫做一个 k 维**开单形**, 记作 $(x_0, x_1, \cdots, x_k)$. 我们还把开单形记作 (s), 相应的闭单形记作 $[s]$.

设 $x \in [x_0, x_1, \cdots, x_k]$. 依据仿射无关性, 点 x 的表达式

$$x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x_i, \quad 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1, \quad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$$

是唯一的, $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k)$ 称为点 x 的**重心坐标**.

例 1 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 0- 单形就是一个点, 1- 单形 $[x_0, x_1]$ 是连接点 x_0, x_1 的闭线段 $\overline{x_0 x_1}$, 2- 单形 $[x_0, x_1, x_2]$ 是以 x_0, x_1, x_2 为顶点的三角形, 这个三角形的重心是以 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 为重心坐标的点. 3- 单形 $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ 是以 x_0, x_1, x_2, x_3 为顶点的四面体, 这个四面体的重心是以 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ 为重心坐标的点. 一般地, k- 单形 $[s]$ 的重心 $\overline{x}$ 是 $[s]$ 中以 $\left(\frac{1}{k+1}, \cdots, \frac{1}{k+1}\right)$ 为重心坐标的点, 即若 $[s] = [x_0, x_1, \cdots, x_k]$, 则 $\overline{x} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} x_i$.

$[x_0, x_1, \cdots, x_k]$ 的闭面是闭单形 $[x_{j_0}, x_{j_1}, \cdots, x_{j_l}]$, 它的开面是开单形 $(x_{j_0}, x_{j_1}, \cdots, x_{j_l})$, 其中 $\{j_0, j_1, \cdots, j_l\}$ 是 $\{0, 1, \cdots, k\}$ 的一个非空子集.

显然, 一个开单形 (s) 是闭单形 $[s]$ 中的一个开集, 它的闭包就是 $[s]$. 而闭单形 $[s]$ 是其所有开面之并. 一个顶点既是一个零维闭面, 又可视为一个零维开面.

定义 5.1.3　一个 (欧氏的) **单纯复形** K 是以某个 $\mathbb{R}^n$ 中的单形为成员的有限集合, 满足:

(K_1) 若 $[s]\in K$, 则 $[s]$ 的所有面都属于 K,

(K_2) 若 $[s],[t]\in K$, 则 $[s]\cap[t]$ 是 $[s]$ 和 $[t]$ 的公共面 (空集看作任一单形的负 1 维面), 此时称 $[t]$ 与 $[t]$ **规则地相处**.

***K* 的维数** $\dim K$ 定义为 K 中单形的最大维数.

由该定义知, 单纯复形 K 是一个 "组合的" 对象, 它由有限个单形按 "规则的" 方式拼成. K 的全体单形的点构成 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集 $\bigcup\limits_{[s]\in K}[s]$, 记为 $[K]$, 赋以 $\mathbb{R}^n$ 的子空间拓扑, 称之为**多面体**. 而把复形 K 叫做多面体 $[K]$ 的一个**单纯剖分**或**三角剖分**. 易见 $[K]$ 作为拓扑空间是紧致的.

定义 5.1.4　设 K,L 是两个单纯复形. 若 $[s]\in L$ 蕴涵 $[s]\in K$, 则 L 叫做 K 的一个**子复形**.

K 的 ***r*-骨架** K^r(整数 $r\leqslant\dim K$) 定义为

$$K^r=\{[s]\in K\,|\,\dim[s]\leqslant r\},$$

易见 K^r 是 K 的一个子复形. 特别, K 的 0- 骨架 K^0 是 K 的全体顶点集.

例 2　设 $[s]\in K$. 由 $[s]$ 以及它的所有真闭面组成的集合是一单纯复形, 记为 $Cl[s]$, 叫做 $[s]$ 的**闭包复形**. 而由 $[s]$ 的所有真闭面组成之集也是一个单纯复形, 记为 $Bd[s]$, 叫做 $[s]$ 的**边缘复形**. 显然, $Cl[s],Bd[s]$ 都是 K 的子复形, 并且 $Bd[s]$ 还是 $Cl[s]$ 的子复形.

定义 5.1.5　单纯复形 K 如果不能分解为两个非空的不相交子复形的并, 就说 K 是**连通复形**, 否则称 K 是**不连通**的. K 的一个子复形 L 如果是极大的连通子复形, 即 L 连通并且又不是 K 的另一个连通子复形的真子复形, 那么 L 叫做 K 的**一个连通分支**.

显然, 每个单纯复形总可分解为有限个连通分支的并集.

定义 5.1.6　设 v 是单纯复形 K 的一个顶点, v 的**(开) 星形** $St(v)$ 指的是下列开单形组成的点集, 这些开单形均以 v 为其一个顶点, 即

$$St(v)=\bigcup_{\substack{v\in[s],\\ [s]\in K}}(s).$$

命题 5.1.1　设 K 是一个单纯复形, v 是 K 的一个顶点, 则 $St(v)$ 是 $[K]$ 中包含 v 的一个开集, 并且 v 是 K 的唯一一个位于 $St(v)$ 中的顶点. 此外, 集 $\{St(v)|v\in K^0\}$ 是 $[K]$ 的一个开覆盖.

证明 $St(v)$ 在 $[K]$ 中的补集

$$(St(v))' = \bigcup_{\substack{v \notin [s], \\ [s] \in K}} [s]$$

显然是闭集, 因此 $St(v)$ 在 $[K]$ 中是点 v 的开邻域.

其次, v 是 $St(v)$ 中唯一的顶点, 因包含一个顶点的唯一开单形就是只由这个顶点组成的 0 - 单形.

$\bigcup_{v \in K^0} St(v) = [K]$, 理由是: 任取点 $x \in [K]$, 因 K 是 $[K]$ 的三角剖分, 必存在某个开单形 (s), 使得 $x \in (s)$. 而对于 (s) 的任何一个顶点 $v, x \in St(v)$.

定义 5.1.7 设 K 是单纯复形, $\{v_1, \cdots, v_m\}$ 为 K 的顶点集. 对于 $j \in \{1, \cdots, m\}$, 定义 $b_j : [K] \to \mathbb{R}$ 如下: 若点 $x \in St(v_j)$, 则 $x \in (s)$, $[s]$ 是某个以 v_j 为顶点的单形, 这时令 $b_j(x)$ 等于 x 在 $[s]$ 中关于顶点 v_j 的重心坐标; 若 $x \in [K] - St(v_j)$, 则令 $b_j(x) = 0$.

不难验证 $b_j : [K] \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数, 称为 $[K]$ 中点的第 j 个**重心坐标函数**, 并且对每个 $x \in [K]$, 有 $x = \sum_{j=1}^{m} b_j(x) v_j$, 其中 $b_j(x) \geqslant 0$ 且 $\sum_{j=1}^{m} b_j(x) = 1$. 此外, 若对某个 $x \in [K], b_{j_0}(x) \neq 0, b_{j_1}(x) \neq 0, \cdots, b_{j_l}(x) \neq 0$, 则 $v_{j_0}, v_{j_1}, \cdots, v_{j_l}$ 是 K 的一个 l- 单形的顶点.

作为定义 5.1.6 的推广, 我们有下列

定义 5.1.8 设 K 是一个单纯复形, (s) 是 K 中的一个开单形. (s) 的开星形 $St(s)$ 是由 K 中一些开单形组成的点集, 这些开单形均以 (s) 作为它的一个面.

下列事实不难得到: 如果 $(s) = (v_{j_0}, \cdots, v_{j_l})$ 且 $x \in [K]$, 则 $x \in St(s)$ 当且仅当 $b_{j_i}(x) \neq 0$ 对所有 $i \in \{0, \cdots, l\}$. 又

$$St(s) = \bigcap_{i=0}^{l} St(v_{j_i}),$$

因此 $St(s)$ 是 $[K]$ 中的一个开集. 此外,

$$[K] - St(s) = \{x \in [K] | b_{j_i}(x) = 0 \text{ 对某一 } i \in \{0, \cdots, l\}\}.$$

5.1.2 单纯链群与边缘同态

从直观上看, 一个 2- 单形 $[x_0, x_1, x_2]$ 的边缘是它的棱 $[x_0, x_1], [x_1, x_2]$ 和 $[x_0, x_2]$ 的一个适当的线性组合. 说得准确些, 需考虑单形的定向, 并引入链的概念.

定义 5.1.9 设 $[s]$ 是一个以 $x_0, x_1, \cdots, x_k$ 为顶点的 k- 单形. $[s]$ 的顶点的两个序 $(x_{i_0}, x_{i_1}, \cdots, x_{i_k})$ 和 $(x_{j_0}, x_{j_1}, \cdots, x_{j_k})$ 称为**等价的**, 如果 $(j_0, j_1, \cdots, j_k)$

是 $(i_0, i_1, \cdots, i_k)$ 的一个偶置换. 显然这是一个等价关系, 并且当 $k \geqslant 1$ 时, 它将 $x_0, x_1, \cdots, x_k$ 的所有序分成两个等价类. 一个**有向单形**是一个单形连同这两个等价类之一的选取. 由顶点序 $(x_0, x_1, \cdots, x_k)$ 确定的有向单形记作 $\langle x_0, x_1, \cdots, x_k\rangle$.

当 $k = 0$ 时, $[s] = [x_0]$ 的顶点只有一种排列. 约定：一个有向 0- 单形是一个 0- 单形连同形式的符号 “+”, “−” 之一的一个选取, 因此一个 0- 单形对应着两个有向 0- 单形, 分别记为 $+\langle x_0\rangle$ 和 $-\langle x_0\rangle$.

有时用 $\langle s\rangle$ 表示 $[s]$ 带有某个确定的定向, 而当 $[s]$ 取相反定向时, 则记为 $-\langle s\rangle$. 由于每个 k- 单形 $[s]$ 位于某个 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 k 维平面上, 因此用 $(x_0, x_1, \cdots, x_k)$ 将 $[s]$ 定向和用有序基 $\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \cdots, x_k - x_0\}$ 来将包含 $[s]$ 的 k 维平面定向是一致的. $k = 1, 2$ 的情形见图 5.1.

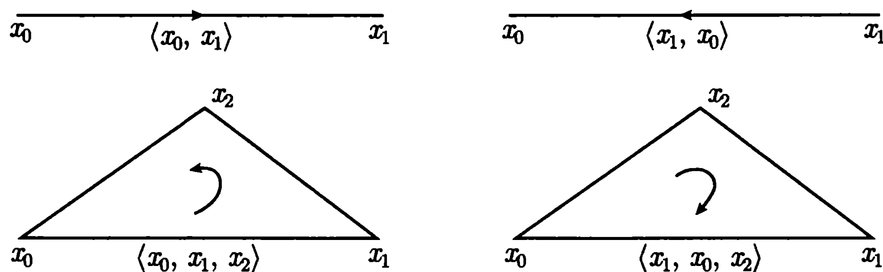


图 5.1

定义 5.1.10　设 K 是 n 维单纯复形, 用 $\mathbb{Z}$ 表示整数群. 对每一 $q : 0 \leqslant q \leqslant n$, 把由 K 的所有 q 维有向单形生成的自由 Abel 群模由所有形如 $\langle s\rangle + (-\langle s\rangle)$ 的元素生成的子群所得到的商群记为 $C_q(K, \mathbb{Z})$(其中 $\langle s\rangle$ 为 K 的有向 q- 单形). 它是一个 Abel 群, 称为 K 的整系数 **q-链群**. 这个群的元素具有下列形式

$$\sum_{i=1}^{\alpha_q} n_i \langle s_i\rangle,$$

其中 $n_i \in \mathbb{Z}$, $\langle s_i\rangle$ 为 K 的有向 q- 单形, α_q 表 K 的 q- 单形的个数.

对于任意的 Abel 群 $\mathcal{G}$, K 的系数在 $\mathcal{G}$ 中的 q- 链群 $C_q(K, \mathcal{G})$ 定义为由下列形式线性组合

$$\sum_{i=1}^{\alpha_q} g_i \langle s_i\rangle, \quad g_i \in \mathcal{G}$$

所成之集, 满足关系 $-g_i\langle s_i\rangle = g_i(-\langle s_i\rangle)$. 特别, 对于任意的域 $\mathcal{F}$, 定义的 $C_q(K, \mathcal{F})$ 是 $\mathcal{F}$ 上的一个向量空间, 其维数等于 α_q, 即 K 的 q- 单形的个数. 本章感兴趣的 $\mathcal{G}$ 将是 $\mathbb{Z}$ 或 $\mathbb{R}$.

下面讨论求 q- 链的边缘运算. 例如 2 维有向单形 $\langle x_0, x_1, x_2\rangle$ 的边缘是它的 “顺向面” 之和 (如图 5.2 所示), 它是一个 1- 链, 用式子表示,

$$\partial\langle x_0, x_1, x_2\rangle = \langle x_1, x_2\rangle + \langle x_2, x_0\rangle + \langle x_0, x_1\rangle$$

$$= \langle x_1, x_2 \rangle - \langle x_0, x_2 \rangle + \langle x_0, x_1 \rangle$$
$$= (-1)^0 \langle \widehat{x}_0, x_1, x_2 \rangle + (-1)^1 \langle x_0, \widehat{x}_1, x_2 \rangle + (-1)^2 \langle x_0, x_1, \widehat{x}_2 \rangle.$$

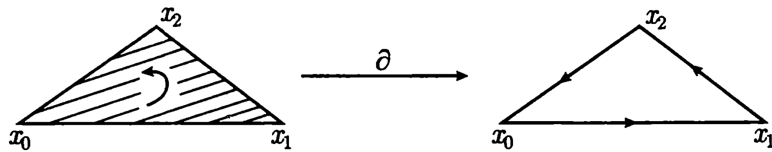


图 5.2

定义 5.1.11 设 $\langle s \rangle = \langle x_0, x_1, \cdots, x_{q+1} \rangle$ 是一个有向 $(q+1)$- 单形. $\langle s \rangle$ **的边缘** $\partial\langle s \rangle$ 是一个 q- 链, 定义为

$$\partial\langle s \rangle = \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \langle x_0, x_1, \cdots, \widehat{x}_j, \cdots, x_{q+1} \rangle,$$

其中 $\langle x_0, \cdots, \widehat{x}_j, \cdots, x_{q+1} \rangle$ 表示从 $\langle s \rangle$ 中除去 x_j 所得的 q- 单形, 称为**顶点 x_j 所对的 q-面**.

复形 K 的有向 $(q+1)$- 单形是 $(q+1)$- 链群 $C_{q+1}(K, \mathcal{G})$ 的生成元, 将定义 5.1.11 建立的有向 $(q+1)$- 单形的边缘运算线性扩张到群 $C_{q+1}(K, \mathcal{G})$ 上, 便得到群同态 $\partial : C_{q+1}(K, \mathcal{G}) \to C_q(K, \mathcal{G})$, 这就是下面的

定义 5.1.12 设 K 是单纯复形, $\mathcal{G}$ 是一个 Abel 群. 对每个 $q : 0 \leqslant q \leqslant \dim K - 1$, 定义边缘算子

$$\partial : C_{q+1}(K, \mathcal{G}) \to C_q(K, \mathcal{G})$$

为

$$\partial \left(\sum_{i=1}^{\alpha_{q+1}} g_i \langle s_i \rangle \right) = \sum_{i=1}^{\alpha_{q+1}} g_i \partial\langle s_i \rangle,$$

其中 $g_i \in \mathcal{G}$, $\langle s_i \rangle$ 为 K 的有向 $(q+1)$- 单形, α_{q+1} 为 K 的 $(q+1)$- 单形的个数.

此外, 令 $C_{-1}(K, \mathcal{G}) = 0$, 规定 $\partial : C_0(K, \mathcal{G}) \to 0$ 为零同态.

引理 5.1.1 边缘算子

$$C_{q+1}(K, \mathcal{G}) \xrightarrow{\partial} C_q(K, \mathcal{G}) \xrightarrow{\partial} C_{q-1}(K, \mathcal{G})$$

满足 $\partial^2 = \partial \circ \partial = 0$, 即相邻两次边缘算子的复合是零同态.

证明 因为 $\partial \circ \partial$ 是线性算子, 只需验证在生成元 $\langle s \rangle = \langle x_0, x_1, \cdots, x_{q+1} \rangle$ 上结论成立即可.

$$\partial(\partial\langle x_0, \cdots, x_{q+1} \rangle) = \partial \left(\sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \langle x_0, \cdots, \widehat{x}_j, \cdots, x_{q+1} \rangle \right).$$

求 $\partial\langle x_0,\cdots,\widehat{x}_j,\cdots,x_{q+1}\rangle$ 就是再除去一个顶点 x_i, 然后按 x_i 的位置添加一个符号. 当 $i<j$ 时, x_i 在第 i 个位置, 应该加 $(-1)^i$; 但当 $i>j$ 时, x_i 在第 $i-1$ 个位置, 加的符号应为 $(-1)^{i-1}$, 因此

$$\begin{aligned}
&\partial(\partial\langle x_0,\cdots,x_{q+1}\rangle)\\
&=\sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j\left[\sum_{0\leqslant i<j}(-1)^i\langle x_0,\cdots,\widehat{x}_i,\cdots,\widehat{x}_j,\cdots,x_{q+1}\rangle\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{j<i\leqslant q+1}(-1)^{i-1}\langle x_0,\cdots,\widehat{x}_j,\cdots,\widehat{x}_i,\cdots,x_{q+1}\rangle\right]\\
&=\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\langle x_0,\cdots,\widehat{x}_i,\cdots,\widehat{x}_j,\cdots,x_{q+1}\rangle\\
&\quad+\sum_{i>j}(-1)^{i+j-1}\langle x_0,\cdots,\widehat{x}_j,\cdots,\widehat{x}_i,\cdots,x_{q+1}\rangle.
\end{aligned}$$

将最后一个式子中的第二项里的 i,j 对调, 因为两个求和式项数相同, 所以一切项全部抵消, 结果为 0.

5.1.3　单纯同调群

从单纯复形的链群之间的边缘运算可以自然地引入单纯复形的同调群, 使同调群集中地反映出复形的有关边缘的几何性质.

设 K 是 n 维单纯复形, $\mathcal{G}$ 为 Abel 群. 对每一 $q:0\leqslant q\leqslant n$, 令

$$\begin{aligned}
Z_q(K,\mathcal{G})&=\mathrm{Ker}\{\partial:C_q(K,\mathcal{G})\to C_{q-1}(K,\mathcal{G})\}\\
&=\{z_q\in C_q(K,\mathcal{G})|\partial z_q=0\},\\
B_q(K,\mathcal{G})&=\mathrm{Im}\{\partial:C_{q+1}(K,\mathcal{G})\to C_q(K,\mathcal{G})\}\\
&=\{b_q\in C_q(K,\mathcal{G})|\exists c_{q+1}\in C_{q+1}(K,\mathcal{G}),\text{s.t. } b_q=\partial c_{q+1}\}.
\end{aligned}$$

易见 $Z_q(K,\mathcal{G})$ 和 $B_q(K,\mathcal{G})$ 都是 $C_q(K,\mathcal{G})$ 的子群, 分别叫做 K 的系数在 $\mathcal{G}$ 中的 **q- 闭链群**和 **q- 边缘链群**, 其元素分别称为 **q- 闭链**与 **q- 边缘链**. 由于相邻两次边缘算子的复合是零同态, 故有

$$B_q(K,\mathcal{G})\subset Z_q(K,\mathcal{G}).$$

事实上, 若 $b_q\in B_q(K,\mathcal{G})$, 则存在 $c_{q+1}\in C_{q+1}(K,\mathcal{G})$ 使得 $b_q=\partial c_{q+1}$, 于是 $\partial b_q=\partial(\partial c_{q+1})=0, b_q\in Z_q(K,\mathcal{G})$. 现在作商群

$$H_q(K,\mathcal{G})=Z_q(K,\mathcal{G})/B_q(K,\mathcal{G}),$$

$H_q(K,\mathcal{G})$ 叫做 K 的系数在 $\mathcal{G}$ 中的第 q 个**单纯同调群**.

如果 K 中两个 q 维链 c 与 c' 之差是边缘链, 即 $c-c'\in B_q(K,\mathcal{G})$, 则说 c 与 c' 是同调的, 记作 $c\sim c'$. 易见同调关系是 $C_q(K,\mathcal{G})$ 中的一个等价关系, 在此关系下分成的等价类即商群 $C_q(K,\mathcal{G})/B_q(K,\mathcal{G})$ 的元素称为同调类, 链 c 所在的同调类记为 $\langle c\rangle$. 显然, 与闭链同调的链是闭链, $H_q(K,\mathcal{G})$ 中的元素是 q- 闭链的同调类.

定理 5.1.1 如果单纯复形 K 和 L 所对应的多面体 $[K]$ 和 $[L]$ 是拓扑同胚的, 即假定存在 $f:[K]\to[L]$ 为同胚映射, 那么 f 可诱导出单纯同调群之间的同构 $f_*:H_q(K,\mathcal{G})\to H_q(L,\mathcal{G})$.

特别, 如果 K_1 与 K_2 是单纯复形, 且 $[K_1]=[K_2]$, 那么它们有相同的单纯同调群.

本定理说明单纯同调群的拓扑不变性, 是单纯同调论的一个基本定理. 群 $H_q(K,\mathcal{G})$ 只依赖于 $[K]$ 的拓扑, 而与多面体如何单纯剖分无关. 本定理证明从略, 可以在许多标准的代数拓扑学教科书中找到, 例如见文献 [20, 21].

例 3 平环的一个单纯剖分 K 见图 5.3 (a), 复形 K 也可以看作是由图 5.3(b) 给出或者由迭合图 5.3(c) 中长方形的两条边 a_1a_4 得到. 它的 6 个二维单形都取逆时针方向为正向, 记为 $\sigma_i, i=1,\cdots,6$, 如图 5.3(b) 中所标出.

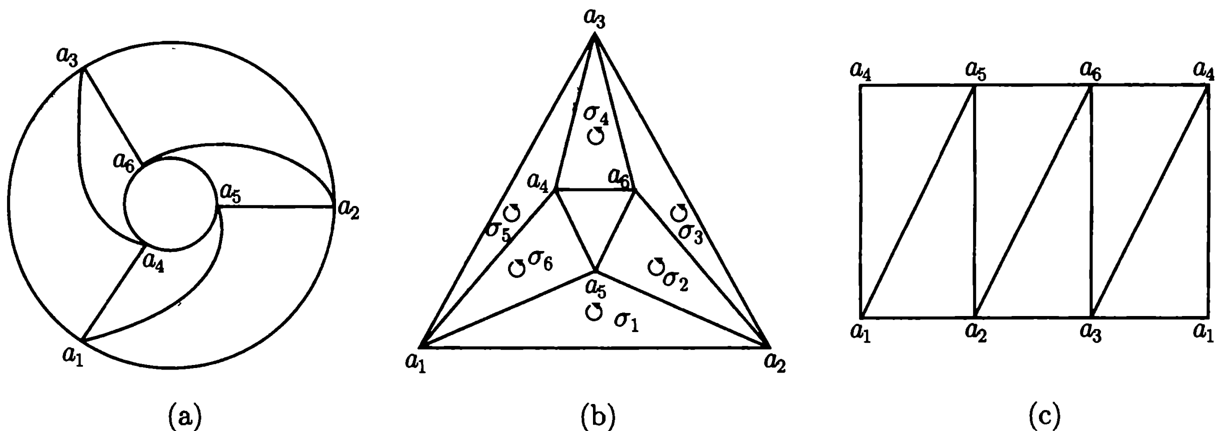


图 5.3

K 是连通复形, 故 $H_0(K,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}$.

K 是 2 维复形, 因此 $H_2(K,\mathbb{Z})=Z_2(K,\mathbb{Z})$. 令 $z_2=\sum_{i=1}^{6}\sigma_i$. 注意到任何两个相邻的有向 2- 单形在它们的公共面上诱导出相反定向, 例如 $\langle a_2,a_5\rangle$ 是 σ_1 的顺向面, 但它是 σ_2 的逆向面, 因此若 $c_2\in C_2(K,\mathbb{Z})$ 取边缘, 则 ∂c_2 在 $\langle a_2,a_5\rangle$ 上取值为 0 当且仅当 c_2 在 σ_1 与 σ_2 上取值相同. 由此可见, 若 ∂c_2 不含像 $\langle a_2,a_5\rangle$ 那样的中间棱 (共 6 条), 则 c_2 必取下列形式: $c_2=nz_2, n\in\mathbb{Z}$. 但

$$\partial c_2=n(\langle a_1,a_2\rangle+\langle a_2,a_3\rangle+\langle a_3,a_1\rangle-\langle a_4,a_5\rangle-\langle a_5,a_6\rangle-\langle a_6,a_4\rangle),$$

因此 $\partial c_2 = 0$ 必有 $n = 0$, 于是 $Z_2(K,\mathbb{Z}) = \{0\}, H_2(K,\mathbb{Z}) = \{0\}$.

计算 $H_1(K,\mathbb{Z})$. 取 $c_1 \in C_1(K,\mathbb{Z})$. 若 c_1 在 $\langle a_1, a_2\rangle$ 上取值为 m, 则 $c_1 - \partial(m\sigma_1)$ 在 $\langle a_1, a_2\rangle$ 上取值为 0, 并且它同调于 c_1. 按此办法, 可用 σ_2 消去 $\langle a_5, a_6\rangle$, 用 $\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ 及 σ_6 分别消去 $\langle a_2, a_3\rangle$, $\langle a_4, a_6\rangle$, $\langle a_1, a_3\rangle$ 及 $\langle a_4, a_5\rangle$, 于是 c_1 同调于链

$$c_1' = n_1\langle a_1, a_5\rangle + n_2\langle a_5, a_2\rangle + n_3\langle a_2, a_6\rangle + n_4\langle a_6, a_3\rangle + n_5\langle a_3, a_4\rangle + n_6\langle a_4, a_1\rangle.$$

如果 $c_1 \in Z_1(K,\mathbb{Z})$, 那么 $c_1' \in Z_1(K,\mathbb{Z})$. 这样便有

$$0 = \partial c_1' = (n_6-n_1)a_1+(n_2-n_3)a_2+(n_4-n_5)a_3+(n_5-n_6)a_4+(n_1-n_2)a_5+(n_3-n_4)a_6,$$

从而 $n_1 = n_2 = \cdots = n_6$. 记

$$z_1 = \langle a_1, a_5\rangle + \langle a_5, a_2\rangle + \langle a_2, a_6\rangle + \langle a_6, a_3\rangle + \langle a_3, a_4\rangle + \langle a_4, a_1\rangle,$$

易见 z_1 是闭链且 $c_1' = n_1 z_1, \langle c_1\rangle = n\langle z_1\rangle$, 这说明 $H_1(K,\mathbb{Z})$ 是由同调类 $\langle z_1\rangle$ 生成的循环群. 下面计算 $\langle z_1\rangle$ 的阶.

设 $k\langle z_1\rangle = 0$, 则有 $c = \sum_{i=1}^{6} n_i\sigma_i \in C_2(K,\mathbb{Z})$ 使得 $\partial c = kz_1$ 而 ∂c 与 kz_1 在 $\langle a_1, a_2\rangle$ 上的值分别为 n_1 和 0, 因此 $n_1 = 0$. 同理可得 $n_2 = \cdots = n_6 = 0$, 从而 $c = 0$ 并且 $k = 0$. 于是 $\langle z_1\rangle$ 是零阶的. $H_1(K,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

例 4 射影平面是由迭合圆盘的对径边界点得到的; 它的单纯部分见图 5.4 (a) 或 (b), 后者标出了它的 10 个 2 维单形的定向.

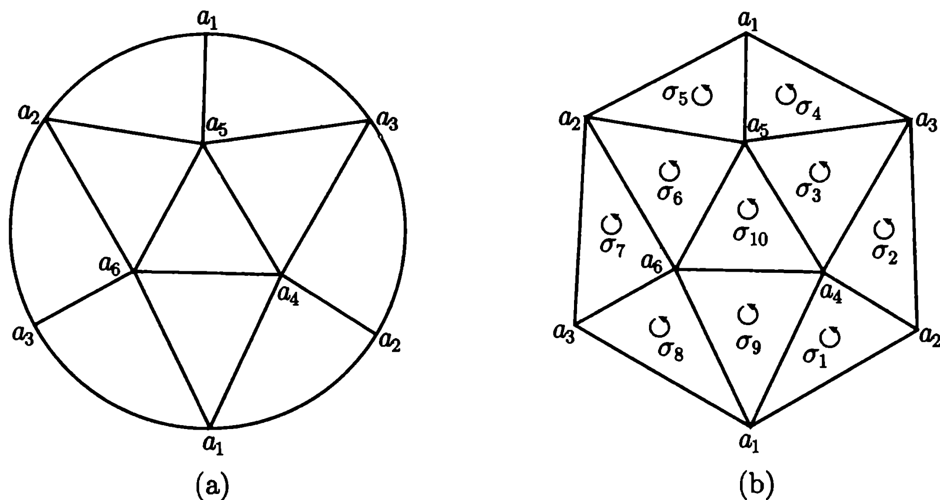


图 5.4

复形 K 连通, 因此 $H_0(K,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

令 $c_2 = \sum_{i=1}^{10} \sigma_i, z_1 = \langle a_1, a_2\rangle + \langle a_2, a_3\rangle + \langle a_3, a_1\rangle$. 类似于例 3, 一个 2 维链 c 取

边缘 ∂c, 如果不含中间棱 (共 12 条), 则 c 具有下列形式 $c = nc_2$ 而 $\partial c_2 = 2z_1$, 因此 $c = nc_2 \in Z_2(K, \mathbb{Z})$ 必有 $n = 0$, 这样 $H_2(K, \mathbb{Z}) = Z_2(K, \mathbb{Z}) = \{0\}$.

按照例 3 中的方法可推出, K 的 1- 闭链同调于 z_1 的整数倍, 即 $H_1(K, \mathbb{Z})$ 是由 $\langle z_1 \rangle$ 生成的循环群. 又因为 $2z_1 = \partial c_2$, 所以 $\langle z_1 \rangle$ 是 2 阶的, $H_1(K, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$.

如果系数群 $\mathbb{Z}$ 用 $\mathbb{Z}_2$ 代替, 那么 $\partial c_2 = 0, c_2$ 是闭链, $H_2(K, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$, 并且 $H_0(K, \mathbb{Z}_2)$ 和 $H_1(K, \mathbb{Z}_2)$ 也是 $\mathbb{Z}_2$.

定义 5.1.13 设 K 是一个 n 维单纯复形. 对每一 q, $0 \leqslant q \leqslant n$, 定义 K 的第 q 个**Betti 数** β_q 为

$$\beta_q = \dim H_q(K, \mathbb{R}),$$

K 的**欧拉 (Euler) 示性数** $\chi(K)$ 是 K 的 Betti 数的交错和, 即

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \beta_q.$$

定理 5.1.2 设 K 是 n 维单纯复形, 记 α_q 为 K 中 q- 单形的个数, $q = 0, 1, \cdots, n$, 则

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \alpha_q,$$

换句话说, $\chi(K) =$ 顶点数 $-$ 棱数 $+2$ 维面数一 $\cdots$.

证明 对每一 $q (0 \leqslant q \leqslant n), C_q(K, \mathbb{R})$ 是实向量空间, 边缘算子

$$\partial : C_q(K, \mathbb{R}) \to C_{q-1}(K, \mathbb{R})$$

是线性映射. 据线性代数中的秩与零化定理, 我们有

$$\begin{aligned} \alpha_q &= \dim C_q(K, \mathbb{R}) = \dim \mathrm{Ker}\partial + \dim \mathrm{Im}\partial \\ &= \dim Z_q(K, \mathbb{R}) + \dim B_{q-1}(K, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

其中 $q = 0, 1, \cdots, n$. 而

$$\beta_q = \dim H_q(K, \mathbb{R}) = \dim Z_q(K, \mathbb{R}) / B_q(K, \mathbb{R}) = \dim Z_q(K, \mathbb{R}) - \dim B_q(K, \mathbb{R}),$$

又 $\dim B_n(K, \mathbb{R}) = \dim B_{-1}(K, \mathbb{R}) = 0$, 所以

$$\begin{aligned} \chi(K) &= \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \beta_q \\ &= \sum_{q=0}^{n} (-1)^q [\dim Z_q(K, \mathbb{R}) - \dim B_q(K, \mathbb{R})] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{q=0}^{n}(-1)^q \dim Z_q(K,\mathbb{R}) + \sum_{q=0}^{n}(-1)^{q+1} \dim B_q(K,\mathbb{R}) \\
&= \sum_{q=0}^{n}(-1)^q \dim Z_q(K,\mathbb{R}) + \sum_{q=1}^{n}(-1)^{q} \dim B_{q-1}(K,\mathbb{R}) \\
&= \sum_{q=0}^{n}(-1)^q [\dim Z_q(K,\mathbb{R}) + \dim B_{q-1}(K,\mathbb{R})] \\
&= \sum_{q=0}^{n}(-1)^q \alpha_q.
\end{aligned}
$$

有一种情形值得指出, 那就是 $[K]$ 同胚于一个可定向的 2 维紧致连通流形. 由于连通性, $H_0(K,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, 而由可定向性可推出 $H_2(K,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, 于是 $\beta_0 = 1, \beta_2 = 1$. 并且对于这种 K, β_1 为偶数, 因此

$$\chi(K) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 = 2 - \beta_1.$$

对这类可定向的 2 维闭曲面, 代数拓扑学有一个漂亮的分类定理 (见文献 [22] 或 [21]) 说, 每个这样的曲面必同胚于在球面上粘贴一定数目 "环柄" 的曲面, 而环柄数等于 $\frac{1}{2}\beta_1$. 例如球面的欧拉示性数为 2, $\beta_1 = 0$, 环面与双环面的欧拉示性数分别为 0 和 -2, 相应的 β_1 分别为 2 和 4(图 5.5). 因此单纯同调群完全决定了可定向 2 维闭曲面 (即可定向的 2 维紧致连通流形) 的同胚类.

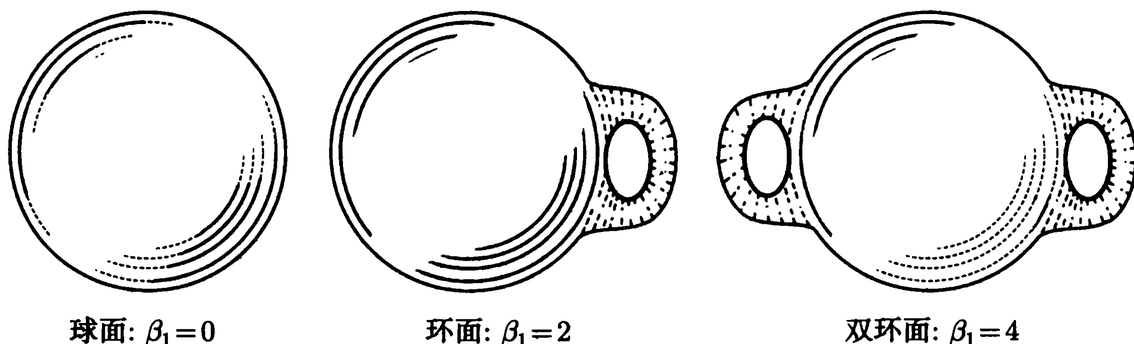


图 5.5

5.1.4　单纯上同调

对于给定的单纯复形 K 与 Abel 群 $\mathcal{G}$. 通过构作群与同态序列 $\{C_q(K,\mathcal{G}),\partial\}$, 其中 $\partial^2 = 0$, 定义出单纯同调群 $\{H_q(K,\mathcal{G})\}$. 类似地, 为定义 K 的单纯上同调, 也希望构作上链群与上边缘算子 ∂^*, 并且该算子满足 $\partial^* \circ \partial^* = 0$. 当系数群 $\mathcal{G} = \mathbb{R}$ 时, $C_q(K,\mathcal{G})$ 是向量空间, 此时定义单纯上同调更为简单, 可通过对偶空间来做.

定义 5.1.14　设 K 是一个 n 维单纯复形. 对每一 $q, 0 \leqslant q \leqslant n$, 令

$$C^q(K,\mathbb{R}) = (C_q(K,\mathbb{R}))^*.$$

定义 $\partial^*: C^q(K,\mathbb{R}) \to C^{q+1}(K,\mathbb{R})$ 为：对于 $\sigma \in C^q(K,\mathbb{R}), c \in C_{q+1}(K,\mathbb{R})$,

$$(\partial^*(\sigma))(c) = \sigma(\partial c),$$

∂^* 叫做上边缘算子. 易见它是一个线性映射, 从而得到一个向量空间与线性映射序列

$$\cdots \to C^{q-1}(K,\mathbb{R}) \xrightarrow{\partial^*} C^q(K,\mathbb{R}) \xrightarrow{\partial^*} C^{q+1}(K,\mathbb{R}) \to \cdots,$$

并且 $\partial^* \circ \partial^* = 0$ (请读者验证). 令

$$Z^q(K,\mathbb{R}) = \{\sigma \in C^q(K,\mathbb{R}) | \partial^*\sigma = 0\},$$

$$B^q(K,\mathbb{R}) = \{\sigma \in C^q(K,\mathbb{R}) | \exists \tau \in C^{q-1}(K,\mathbb{R}) \text{s.t.} \sigma = \partial^*\tau\},$$

因而 $Z^q(K,\mathbb{R})$ 是 $\partial^*: C^q(K,\mathbb{R}) \to C^{q+1}(K,\mathbb{R})$ 的核, $B^q(K,\mathbb{R})$ 是 $\partial^*: C^{q-1}(K,\mathbb{R}) \to C^q(K,\mathbb{R})$ 的像. $C^q(K,\mathbb{R})$ 中的元素叫做 **q-上链**. $Z^q(K,\mathbb{R}), B^q(K,\mathbb{R})$ 中的元素分别叫做**上闭链**与**上边缘链**. 由于 $\partial^* \circ \partial^* = 0$, 所以

$$B^q(K,\mathbb{R}) \subset Z^q(K,\mathbb{R}),$$

商空间

$$H^q(K,\mathbb{R}) = Z^q(K,\mathbb{R})/B^q(K,\mathbb{R})$$

叫做 K 的第 q 个**单纯上同调群**.

为了比较单纯同调与 de Rham 同调这两套理论, 引入单纯上同调将更为方便. 下面给出上边缘算子 ∂^* 的作用的公式. 对于复形 K 的每一个有向 q- 单形 $\langle s\rangle$, 令 $\sigma_{\langle s\rangle} \in C^q(K,\mathbb{R})$ 定义为

$$\sigma_{\langle s\rangle}(\langle t\rangle) = \begin{cases} 1, & \text{当}\langle t\rangle = \langle s\rangle, \\ -1 & \text{当}\langle t\rangle = -\langle s\rangle, \\ 0, & \text{当}\langle t\rangle \neq \pm\langle s\rangle. \end{cases}$$

由此可知, 当 $\{\langle s_1\rangle, \cdots, \langle s_{\alpha_q}\rangle\}$ (其中 α_q 表 K 的 q- 单形个数) 是 $C_q(K,\mathbb{R})$ 的一个基时, $\{\sigma_{\langle s_1\rangle}, \cdots, \sigma_{\langle s_{\alpha_q}\rangle}\}$ 是 $C^q(K,\mathbb{R})$ 的对偶基. 因 ∂^* 是线性的, 只需计算 ∂^* 在生成元上的作用.

引理 5.1.2 $\partial^*\sigma_{\langle x_0,\cdots,x_q\rangle} = \sum_x{}' \sigma_{\langle x,x_0,\cdots,x_q\rangle}$, 其中 $\sum_x{}'$ 表示在所有满足 $[x,x_0,\cdots,x_q]$ 是 K 的一个 $(q+1)$- 单形的顶点 $x \in K$ 上求和.

证明 只需在 K 的有向 $(q+1)$- 单形

$$\langle t\rangle = \langle y_0, y_1, \cdots, y_{q+1}\rangle$$

上验证这个公式. 记 $\langle s\rangle = \langle x_0, \cdots, x_q\rangle$, 则

$$\begin{aligned}(\partial^*\sigma_{\langle s\rangle})(\langle t\rangle) &= \sigma_{\langle s\rangle}(\partial\langle t\rangle)\\ &= \sigma_{\langle s\rangle}\left(\sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j\langle y_0,\cdots,\widehat{y}_j,\cdots,y_{q+1}\rangle\right)\\ &= \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j\sigma_{\langle s\rangle}(\langle y_0,\cdots,\widehat{y}_j,\cdots,y_{q+1}\rangle),\end{aligned}$$

上述和式中, 除了对于那些 j 使 $\langle y_0,\cdots,\widehat{y}_j,\cdots,y_{q+1}\rangle = \pm\langle s\rangle$ 因而 $[s]$ 是 $[t]$ 的一个面外, 其他各项均为零. 而 $[s]$ 是 $[t]$ 的一个面意指存在某个顶点 $x\in K$, 使 $[t]=[x,x_0,\cdots,x_q]$. 在这种情形下, 有

(i) $\langle t\rangle = \langle x, x_0,\cdots,x_q\rangle$, 因而 $(\partial^*\sigma_{\langle s\rangle})(\langle t\rangle)=1$, 或

(ii) $\langle t\rangle = -\langle x, x_0,\cdots,x_q\rangle$, 因而 $(\partial^*\sigma_{\langle s\rangle})(\langle t\rangle)=-1$.

从而

$$(\partial^*\sigma_{\langle s\rangle})(\langle t\rangle)=\begin{cases}1, & \langle t\rangle=\langle x,x_0,\cdots,x_q\rangle \text{ 对某个 } x\in K,\\ -1, & \langle t\rangle=-\langle x,x_0,\cdots,x_q\rangle \text{ 对某个 } x\in K,\\ 0, & \text{其他情形},\end{cases}$$

于是有

$$(\partial^*\sigma_{\langle s\rangle})(\langle t\rangle)=\left(\sum_x{}'\sigma_{\langle x,x_0,\cdots,x_q\rangle}\right)(\langle t\rangle).$$

而这对于任意 $\langle t\rangle$ 都成立, 故引理得证.

请读者验证: 对于单纯复形 $K, H^q(K,\mathbb{R})$ 同构于 $(H_q(K,\mathbb{R}))^*$,

5.2 de Rham 定理

为建立流形的 de Rham 同调和单纯同调之间的联系, 必须对流形进行单纯剖分. 一个**光滑的单纯剖分流形**指的是一个三元组 (M,K,h), 其中 M 是一个光滑流形, K 是一个单纯复形, $h:[K]\to M$ 是一个拓扑同胚, 满足如下条件: 对于 K 中的每个单形 $[s]$, 映射 $h|[s]:[s]\to M$ 有一个到 $[s]$ 在其所在平面的一个邻域 U 上的延拓 $h_s: U\to M$ 使得 (U,h_s) 是 M 的光滑子流形.

显然, 光滑的单纯剖分流形是紧致的, 因为对于每个单纯复形 K 而言, $[K]$ 是紧致的. 如果 M 的维数为 n, 那么对同胚 h 要求的条件只需对 K 的每一个 n- 单形满足就行了, 因为 K 的每一个单形必为某一个 n- 单形的面, 并且光滑映射在子流形上的限制是光滑的.

例 1 设 M 是 n 维球面 S^n, $[s]$ 是外接于 S^n 的一个 $(n+1)$- 单形. 令 K 是 $[s]$ 的闭包复形 $Cl[s]$ 的 n- 骨架, $h:[K]\to S^n$ 为径向投影, 则 (S^n,K,h) 是一个光滑的单纯剖分流形 (图 5.6).

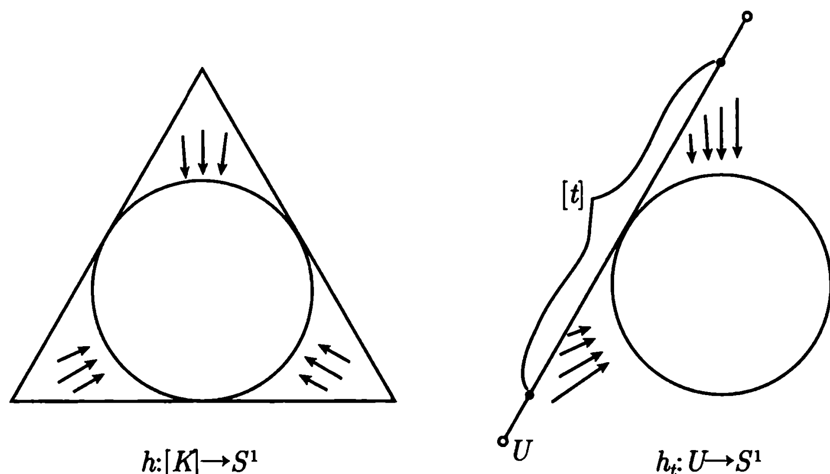


图 5.6

作为练习, 请读者验证 S^n 的单纯上同调群

$$H^q(S^n,\mathbb{R})\cong\begin{cases}0, & \text{当 } 0<q<n,\\ \mathbb{R}, & \text{当 } q=0,n.\end{cases}$$

而应用下面的引理 5.2.1 可计算 S^n 的 de Rham 上同调群. 假设 ω 是定义在 $[K]$ 的一个邻域上的光滑闭 q- 形式 $(0<q<n)$, 那么依据引理 5.2.1, ω 可延拓为 $[s]$ 上的光滑闭 q- 形式, 因而必为恰当 q- 形式. 这蕴涵着对于 $0<q<n, H^q_{\mathrm{d}}(S^n,\mathbb{R})=0$. 对于 $q=n$, 定义在 $[K]$ 的一个邻域上并且满足 $\int_{\partial\langle s\rangle}\omega=0$ 的任意一个闭 n- 形式 ω 也是恰当的, 于是由

$$Z^n_{\mathrm{d}}(S^n,\mathbb{R})\to\mathbb{R},\omega\mapsto\int_{\partial\langle s\rangle}\omega$$

定义的映射是一个以 $B^n_{\mathrm{d}}(S^n,\mathbb{R})$ 为核的同态, 因此 $H^n_{\mathrm{d}}(S^n,\mathbb{R})\cong\mathbb{R}$. 又 S^n 是连通的, $H^0_{\mathrm{d}}(S^n,\mathbb{R})\cong\mathbb{R}$.

现在介绍拓展引理, 即引理 5.2.1. 为简化表述, 先给出以下约定. 设 $[s]$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 k- 单形, 将 $[s]$ 的闭包复形 $Cl[s]$ 的 $(k-1)$- 骨架简记为 s^{k-1}, 并约定在 $[s^{k-1}]$ (或 $[s]$) 上定义的光滑微分形式理解为 $[s^{k-1}]$ (或 $[s]$) 在其所在平面上的一个邻域内定义的光滑微分形式.

引理 5.2.1 设 $[s]$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 k- 单形, $k\geqslant 1$.

(a_r) 假设 $r\geqslant 0$. 若 ω 是 $[s^{k-1}]$ 上的一个光滑闭 r- 形式, 则存在 $[s]$ 上的光滑闭 r- 形式 τ, 使得 $\tau|[s^{k-1}]=\omega$. 此外, 如果 $k=r+1$, 还需添加假设: $\int_{\partial\langle s\rangle}\omega=0$.

(b_r) 假设 $r \geqslant 1$. 若 ω 是 $[s]$ 上的一个光滑闭 r- 形式, 并且存在 $[s^{k-1}]$ 上的光滑 $(r-1)$- 形式 τ 使得 $\mathrm{d}\tau = \omega|[s^{k-1}]$, 那么必有 $[s]$ 上的光滑 $(r-1)$- 形式 τ' 使得 $\tau'|[s^{k-1}] = \tau$ 且 $\mathrm{d}\tau' = \omega$. 此外, 如果 $k = r$, 还需补充假设条件: $\int_{\partial\langle s\rangle} \tau = \int_{\langle s\rangle} \omega$.

注 在 (a_r) 和 (b_r) 中添补的积分条件是必须的, 这是因为在 (a_r) 中, 如果 τ 存在, 则

$$\int_{\partial\langle s\rangle} \omega = \int_{\partial\langle s\rangle} \tau = \int_{\langle s\rangle} \mathrm{d}\tau = \int_{\langle s\rangle} 0 = 0.$$

而在 (b_r) 中, 如果 τ' 存在, 那么

$$\int_{\langle s\rangle} \omega = \int_{\langle s\rangle} \mathrm{d}\tau' = \int_{\partial\langle s\rangle} \tau' = \int_{\partial\langle s\rangle} \tau.$$

证明 用归纳法. 首先验证 (a_0), 然后证明 $(a_{r-1}) \Longrightarrow (b_r) \Longrightarrow (a_r)$.

(a_0) : ω 是一个定义在 $[s^{k-1}]$ 上的光滑 0- 形式即光滑函数并且 $\mathrm{d}w = 0$, 因此在它的定义域的连通分支上, w 为常数.

(i) $k > 1, [s^{k-1}]$ 是连通的, 故 ω 在 $[s^{k-1}]$ 的连通邻域内是一个常值函数 c, 因此在 $[s]$ 的一个邻域内令 $\tau = c$.

(ii) $k = 1, [s^0]$ 由两个顶点, 例如 x_0, x_1 组成, 不妨设 $\langle s\rangle = \langle x_0, x_1\rangle$. 由积分条件有

$$0 = \int_{\partial\langle s\rangle} \omega = \omega(x_1) - \omega(x_0).$$

这说明 ω 在点 x_1 的邻域内的常数值与 w 在点 x_0 的邻域内的常数值相等, 因而 ω 在 $[s^0]$ 的邻域内是常值, 这样一来在 $[s]$ 的一个邻域内令 τ 等于这个常数值.

$(a_{r-1}) \Longrightarrow (b_r)$: ω 是定义在包含 $[s]$ 的一个开集 U 上的闭 r- 形式. 我们可以在 U 中选取一个包含 $[s]$ 的星形状开集, 应用 Poincaré 引理 (即定理 2.7.1), ω 必为恰当形式, 即存在 $[s]$ 上的光滑 $(r-1)$- 形式 τ_1, 使得 $\mathrm{d}\tau_1 = \omega$. 注意 $\tau_1|[s^{k-1}]$ 不一定等于 τ. 考虑差 $\tau_1 - \tau$, 它在 $[s^{k-1}]$ 上是闭形式, 因为 $\mathrm{d}(\tau_1 - \tau) = \omega - \omega = 0$. 此外, 若 $k = (r-1)+1 = r$, 则依假设条件有

$$\int_{\partial\langle s\rangle} (\tau_1 - \tau) = \int_{\langle s\rangle} \mathrm{d}\tau_1 - \int_{\partial\langle s\rangle} \tau = \int_{\langle s\rangle} \omega - \int_{\partial\langle s\rangle} \tau = 0.$$

现应用 (a_{r-1}) 于形式 $\tau_1 - \tau$, 则存在 $[s]$ 上的光滑闭 $(r-1)$- 形式 μ, 使得 $\mu|[s^{k-1}] = \tau_1 - \tau$.

令 $\tau' = \tau_1 - \mu$, 则 τ' 是 $[s]$ 上的光滑 $(r-1)$- 形式, $\tau'|[s^{k-1}] = \tau_1 - (\tau_1 - \tau) = \tau$, 并且在 $[s]$ 上, $\mathrm{d}\tau' = \mathrm{d}\tau_1 - \mathrm{d}\mu = \omega - 0 = \omega$.

$(b_r) \Longrightarrow (a_r)$：设 $\langle s\rangle = \langle x_0, x_1, \cdots, x_k\rangle, \langle t\rangle = \langle x_1, \cdots, x_k\rangle$, 并设 $F = [s^{k-1}] - (t)$. 易见 F 是星形状的, 因此任何一个包含 F 的开集包含一个 F 的星形状开邻域 U(见图 5.7). 现 ω 是 $[s^{k-1}]$ 上因而也是 F 上的一个光滑闭 r- 形式, 据 Poincaré 引理, 存在一个定义于 F 的邻域内的光滑 $(r-1)$- 形式 μ, 使得 $\mathrm{d}\mu = \omega$. 下面分两种情形.

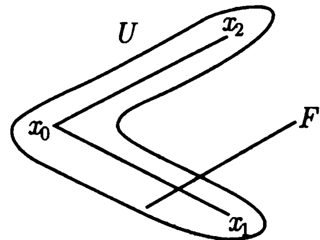


图 5.7

(i) $k > 1$. 此时在 $[t^{k-2}]$ 上有 $\mathrm{d}\mu = \omega$. 我们将应用 (b_r) 于形式 ω 和 μ 以及 $(k-1)$- 单形 $[t]$, 为此需检验当 $k-1=r$ 时, $\int_{\langle t\rangle} \omega - \int_{\partial\langle t\rangle} \mu = 0$ 是否成立. 令 $c = \partial\langle s\rangle - \langle t\rangle$, 则 $\partial c = -\partial\langle t\rangle$, 并且 c 的每个单形含于 F, 因而

$$\int_{\langle t\rangle} \omega - \int_{\partial\langle t\rangle} \mu = \int_{\langle t\rangle} \omega + \int_{\partial c} \mu = \int_{\langle t\rangle} \omega + \int_c \mathrm{d}\mu = \int_{\langle t\rangle} \omega + \int_c \omega = \int_{\partial\langle s\rangle} \omega = 0,$$

最后一个等式由假设条件给出. 应用 (b_r), 必有 $[t]$ 上的一个光滑 $(r-1)$- 形式 μ', 使得 $\mu'|[t^{k-2}] = \mu$ 并且 $\mathrm{d}\mu' = \omega$. 注意 μ 和 μ' 在其公共定义域这个开集上是一致的 (见图 5.8), 令 μ_2 是定义在 $[s^{k-1}]$ 的邻域中的形式, 它是由 μ 和 μ' 沿着它们的公共定义域粘合而得, 于是在含 $[s^{k-1}]$ 的邻域内, $\mathrm{d}\mu_2 = \omega$.

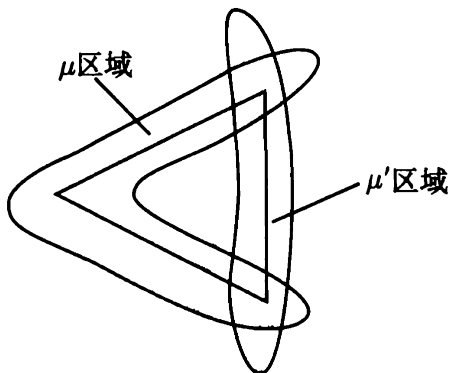


图 5.8



图 5.9

(ii) $k = 1$, 此时 $[s^{k-1}] = [s^0]$ 由两个顶点 x_0, x_1 组成. 因为 ω 是闭 r- 形式, Poincaré 引理断言在 $x_i (i = 0, 1)$ 的邻域中存在 $(r-1)$- 形式 μ_i, 使得 $\mathrm{d}\mu_i = \omega$. 不妨定 μ_0 的定义域与 μ_1 的定义域不相交 (图 5.9), 如有必要将定义域收缩. 这样便在 $[s^{k-1}]$ 的邻域内定义了 μ_2 使得 $\mathrm{d}\mu_2 = \omega$.

由 (i) 和 (ii), 我们已在 $[s^{k-1}]$ 的一邻域内定义了 $(r-1)$- 形式 μ_2 使得 $\mathrm{d}\mu_2 = \omega$. 希望将它延拓到 $[s]$ 的一邻域内. 利用推论 1.2.2, 选取光滑函数 f 使得在 $[s^{k-1}]$ 的一个小邻域 V 中恒等于 1, 而在 μ_2 的定义域之外恒为 0. 于是 $f\mu_2$ 是一个定义于 $[s]$ 的一邻域内的光滑 $(r-1)$- 形式. 再令 $\tau = \mathrm{d}(f\mu_2)$, 则 τ 是 $[s]$ 的邻域内的闭 r-

形式. 因在 $[s^{k-1}]$ 的邻域 V 中, 有 $f\equiv 1$, 因此在 V 中, 有

$$\tau=\mathrm{d}(f\mu_2)=\mathrm{d}f\wedge\mu_2+f\mathrm{d}\mu_2=\mathrm{d}\mu_2=\omega.$$

回到例 1, 比较球面 S^n 的单纯上同调群和 de Rham 上同调群, 我们看到同维的两个上同调群是同构的. 而 de Rham 定理是说, 对于光滑的单纯剖分流形 (M,K,h), M 的 de Rham 上同调群同构于 K 的单纯上同调群, 因此证明 de Rham 定理必须对每一 q, 定义一个映 $H^q_{\mathrm{d}}(M,\mathbb{R})$ 成 $H^q(K,\mathbb{R})$ 的同构. 代数拓扑学的通用作法是建立 (上) 链复形之间的 (上) 链映射, 因为它可以诱导出对应的 (上) 同调群之间的同态. 为此我们需构作一列线性映射 $\{f_q:A^q(M)\to C^q(K,\mathbb{R})\}$ 使得下列图表可换

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots\to & A^{q-1}(M) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & A^q(M) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & A^{q+1}(M) & \to\cdots \\
 & \downarrow f_{q-1} & & \downarrow f_q & & \downarrow f_{q+1} & \\
\cdots\to & C^{q-1}(K,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\partial^*} & C^q(K,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\partial^*} & C^{q+1}(K,\mathbb{R}) & \to\cdots
\end{array}$$

即对所有 q, 有 $\partial^*\circ f_q=f_{q+1}\circ\mathrm{d}$, 这样一来便有

$$f_q:Z^q_{\mathrm{d}}(M,\mathbb{R})\to Z^q(K,\mathbb{R})\quad 及\quad f_q:B^q_{\mathrm{d}}(M,\mathbb{R})\to B^q(K,\mathbb{R}).$$

事实上, 若 $\omega\in Z^q_{\mathrm{d}}(M,\mathbb{R})$, 则 $\omega\in A^q(M)$ 且 $\mathrm{d}\omega=0$. 而这蕴涵着

$$\partial^*(f_q(\omega))=f_{q+1}(\mathrm{d}\omega)=f_{q+1}(0)=0,$$

故 $f_q(\omega)\in Z^q(K,\mathbb{R})$. 倘若 $\omega\in B^q_{\mathrm{d}}(M,\mathbb{R})$, 那么存在 $\tau\in A^{q-1}(M)$ 使得 $\omega=\mathrm{d}\tau$, 因此

$$f_q(\omega)=f_q(\mathrm{d}\tau)=\partial^*(f_{q-1}(\tau))\in\mathrm{Im}\partial^*,$$

这表明 $f_q(\omega)\in B^q(K,\mathbb{R})$. 于是由 f_q 诱导出同态

$$\tilde{f}_q:H^q_{\mathrm{d}}(M,\mathbb{R})=Z^q_{\mathrm{d}}(M,\mathbb{R})/B^q_{\mathrm{d}}(M,\mathbb{R})\to Z^q(K,\mathbb{R})/B^q(K,\mathbb{R})=H^q(K,\mathbb{R}).$$

现在就来定义这样的线性映射序列

$$\int_q:A^q(M)\to C^q(K,\mathbb{R}).$$

对于 $\omega=A^q(M)$, $\displaystyle\int_q(\omega)$ 为 $C_q(K,\mathbb{R})$ 上的一个线性泛函, 因此只需指定它在 $C_q(K,\mathbb{R})$ 的基元素即有向 q- 单形 $\langle s\rangle$ 上的值. 为此考虑光滑映射 $h_s:U\to M$, 其中 U 是 $[s]$ 在其所在平面 (它是一个 q 维欧氏空间) 上的一个开邻域, 那么 $h_s^*(\omega)$ 是 U 上的光

滑 q- 形式. 定义 $\int_q(\omega)(\langle s\rangle)$ 为光滑 q- 形式 $h_s^*(\omega)$ 在 $\langle s\rangle$ 上的积分, 即

$$\int_q(\omega)(\langle s\rangle)=\int_{\langle s\rangle}h_s^*(\omega).\tag{1}$$

注意上式右端的积分只依赖于点集 $h([s])$ 及其定向, 而与同胚 $h|_{[s]}$ 的延拓 h_s 无关. 下面证明

$$\partial^*\circ\int_q=\int_{q+1}\circ\mathrm{d}\tag{2}$$

任取 q- 形式 ω 和有向 $(q+1)$- 单形 $\langle s\rangle$, 有

$$\begin{aligned}\left(\int_{q+1}\circ\mathrm{d}(\omega)\right)(\langle s\rangle)&=\int_{\langle s\rangle}h_s^*(\mathrm{d}\omega)=\int_{\langle s\rangle}\mathrm{d}(h_s^*(\omega))\\&=\int_{\partial\langle s\rangle}h_s^*(\omega)=\int_q(\omega)(\partial\langle s\rangle)=\left(\partial^*\circ\int_q(\omega)\right)(\langle s\rangle),\end{aligned}$$

由于 ω 和 $\langle s\rangle$ 是任取的, 所以 (2) 式成立. 依前面所述, $\int_q$ 诱导一个同态

$$\widetilde{\int_q}:H_{\mathrm{d}}^q(M,\mathbb{R})\to H^q(K,\mathbb{R}).$$

定理 5.2.1(de Rham 定理) 设 (M,K,h) 是一个光滑的单纯剖分流形, 则对每个 $q:0\leqslant q\leqslant\dim M$,

$$\widetilde{\int_q}:H_{\mathrm{d}}^q(M,\mathbb{R})\to H^q(K,\mathbb{R})$$

是一个同构.

本定理需证 $\widetilde{\int_q}$ 既是满同态又是单同态, 它们分别由下面两个引理推得.

引理 5.2.2 存在一个线性映射序列

$$\alpha_q:C^q(K,\mathbb{R})\to A^q(M),\quad 0\leqslant q\leqslant\dim M$$

具有下列性质:

(i) $\mathrm{d}\circ\alpha_q=\alpha_{q+1}\circ\partial^*$,

(ii) $\int_q\circ\alpha_q=$ 恒同,

(iii) 若 $\langle s\rangle$ 是 K 的一个有向 q- 单形, 则 q- 形式 $\alpha_q(\sigma_{\langle s\rangle})$ 在 $M-St(s)$ 的一个邻域中恒等于零.

注　性质 (i) 说明映射 α_q 可诱导一个同态 $\widetilde{\alpha}_q: H^q(K,\mathbb{R}) \to H^q_{\mathrm{d}}(M,\mathbb{R})$, 性质 (ii) 则说 $\widetilde{\alpha}_q$ 是 $\widetilde{\int_q}$ 的一个右逆, 因而可推出 $\widetilde{\int_q}$ 是满同态. 另一方法是: 对于 $z \in Z^q(K,\mathbb{R})$, 令 $\omega = \alpha_q(z)$, 则

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\circ\alpha_q(z) = \alpha_{q+1}\circ\partial^*(z) = \alpha_{q+1}(0) = 0,$$

故 $\omega \in Z^q_{\mathrm{d}}(M,\mathbb{R})$. 又

$$\int_q(\omega) = \int_q \circ\alpha_q(z) = z,$$

于是 $\int_q : Z^q_{\mathrm{d}}(M,\mathbb{R}) \to Z^q(K,\mathbb{R})$ 是满射, 从而 $\widetilde{\int_q}$ 也是满射.

引理 5.2.2 的证明　为简化记号, 通过 h 将 $[K]$ 与 M 等同, 即假定 $[K]=M$, 并且 $h=$ 恒同.

设 $v_1,\cdots,v_m$ 是 K 的全部顶点. 对于 $j\in\{1,\cdots,m\}$, 我们已定义了第 j 个重心坐标函数 $b_j:[K]\to\mathbb{R}$, 令

$$F_j = \left\{x\in[K] | b_j(x) \geqslant \frac{1}{n+1}\right\},\quad G_j = \left\{x\in[K] | b_j(x) \leqslant \frac{1}{n+2}\right\},$$

其中 $n=\dim M$, 显然 F_j, G_j 是 M 中的闭集. 由定义有

$$F_j \subset St(v_j),\quad [K]-St(v_j)\subset G_j.$$

$\{F_j\}$ 覆盖 M: 因为每个 $x\in M$ 必落在某个维数 $l\leqslant n$ 的开单形 $(s)=(v_{j_0},\cdots,v_{j_l})$ 内. 当 $j\notin\{j_0,\cdots,j_l\}$ 时, $b_j(x)=0$. 而由 $\sum\limits_{i=0}^{l} b_{j_i}(x)=1$ 知, 对于某个 $j\in\{j_0,\cdots,j_l\}$, $b_j(x)\geqslant \dfrac{1}{l+1}\geqslant\dfrac{1}{n+1}$, 于是对于这个 j, $x\in F_j$.

而 F_j, G_j 是 M 中的互不相交闭子集, 利用推论 1.2.2, 可构作 M 上的光滑函数 f_j, 使得 $0\leqslant f_j\leqslant 1$, 并且在 F_j 上 $f_j=1$, 在 G_j 上 $f_j=0$. 因为 $\{F_j: j=1,\cdots,m\}$ 覆盖 M, $\sum\limits_{j=1}^{m} f_j$ 处处大于 0, 令 $g_j = f_j\Big/\sum\limits_{i=1}^{m} f_i$, 则 g_j 在 M 上有定义并且是光滑函数, $\{g_j\}$ 是从属于开覆盖 $\{St(v_j)|j=1,\cdots,m\}$ 的单位分解.

现在利用上面定义的一族光滑函数 $\{g_j\}$ 来定义 α_q. 因为要求 α_q 是线性的, 因此只需在 $C^q(K,\mathbb{R})$ 的生成元 $\sigma_{\langle s\rangle}$ 上指定 α_q 的值. 对于每个有向 q- 单形 $\langle s\rangle = \langle v_{j_0},\cdots,v_{j_q}\rangle$, 定义 $\alpha_q(\sigma_{\langle s\rangle})$ 为 q- 形式

$$\alpha_q(\sigma_{\langle s\rangle}) = q!\sum_{i=0}^{q}(-1)^i g_{j_i}\mathrm{d}g_{j_0}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}g_{j_i}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}g_{j_q}. \tag{3}$$

下面验证 α_q 满足性质 (i)~(iii).

性质 (i) $\mathrm{d}\circ\alpha_q(\sigma_{\langle s\rangle})=(q+1)!\mathrm{d}g_{j_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}g_{j_q}$.

另一方面, 利用引理 5.1.2, 有

$$\begin{aligned}\alpha_{q+1}\circ\partial^*(\sigma_{\langle s\rangle})&=\alpha_{q+1}\left({\sum_{v_k}}'\sigma_{\langle v_k,v_{j_0},\cdots,v_{j_q}\rangle}\right)\\&=(q+1)!{\sum_k}'\left[g_k\mathrm{d}g_{j_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}g_{j_q}-\sum_{i=0}^{q}(-1)^i g_{j_i}\mathrm{d}g_k\wedge\mathrm{d}g_{j_0}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}g}_{j_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}g_{j_q}\right]\end{aligned}\tag{4}$$

断言: 如果顶点 $v_k,v_{j_0},\cdots,v_{j_q}$ 互不相同, 并且不是 K 的一个 $(q+1)$- 单形的顶点, 那么

$$g_k\mathrm{d}g_{j_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}g_{j_q}\equiv 0$$

及

$$g_{j_i}\mathrm{d}g_k\wedge\mathrm{d}g_{j_0}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}g}_{j_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}g_{j_q}\equiv 0.$$

事实上, 若 $x\notin St(v_k)$, 则 $g_k(x)=0$; 若 $x\in St(v_k)$, 则 $b_k(x)\neq 0$, 但现在对某个 $i\in\{0,\cdots,q\},b_{j_i}(x)=0$, 否则有 $b_k(x)\neq 0,b_{j_i}(x)\neq 0,j=0,1,\cdots,q$, 因而 $\{v_k,v_{j_0},\cdots,v_{j_q}\}$ 可张成 K 的一个 $(q+1)$- 单形, 与假设矛盾. 现对上述 i, 令

$$U=\left\{y\in[K]|b_{j_i}(y)<\frac{1}{n+1}\right\},$$

则 U 是 M 中点 x 的开邻域, 且 $U\subset G_{j_i}$, 因此在 U 上 g_{j_i} 恒等于 0 并且 $\mathrm{d}g_{j_i}\equiv 0$. 从而断言成立. 将它应用到表达式 (4) 中,

$${\sum_k}'g_k\mathrm{d}g_{j_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}g_{j_q}=\sum_{k\notin\{j_0,\cdots,j_q\}}g_k\mathrm{d}g_{j_0}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}g_{j_q},\tag{5}$$

其中右边的那些在左边不出现的项都恒等于零. 又

$$\begin{aligned}&{\sum_k}'\sum_{i=0}^{q}(-1)^i g_{j_i}\mathrm{d}g_k\wedge\mathrm{d}g_{j_0}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}g}_{j_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}g_{j_q}\\=&\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\sum_{k\notin\{j_0,\cdots,j_q\}}g_{j_i}\mathrm{d}g_k\wedge\mathrm{d}g_{j_0}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}g}_{j_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}g_{j_q}\\=&\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\sum_{k\neq j_i}g_{j_i}\mathrm{d}g_k\wedge\mathrm{d}g_{j_0}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}g}_{j_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}g_{j_q}\\=&\sum_{i=0}^{q}(-1)^i g_{j_i}\left(\sum_{k\neq j_i}\mathrm{d}g_k\right)\wedge\mathrm{d}g_{j_0}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}g}_{j_i}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}g_{i_q}\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{q}(-1)^i g_{j_i}(-\mathrm{d}g_{j_i}) \wedge \mathrm{d}g_{j_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}g_{j_i}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}g_{j_q}$$

$$= -\sum_{i=0}^{q} g_{j_i} \mathrm{d}g_{i_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}g_{j_q} \tag{6}$$

第 4 个等号成立是因为 $\sum_{k=1}^{m} g_k = 1$ 得到 $\sum_{k=1}^{m} \mathrm{d}g_k = 0$, 于是 $\sum_{k \neq j_i}^{m} \mathrm{d}g_k = -\mathrm{d}g_{j_i}$. 从 (5) 式减去 (6) 式并代入 (4) 式中, 得

$$\begin{aligned}\alpha_{q+1} \circ \partial^*(\sigma_{\langle s\rangle}) &= (q+1)!\left(\sum_{k=1}^{m} g_k\right) \mathrm{d}g_{j_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}g_{j_q} \\ &= (q+1)! \mathrm{d}g_{j_0} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}g_{j_q} \\ &= \mathrm{d} \circ \alpha_q(\sigma_{\langle s\rangle}).\end{aligned}$$

性质 (iii) 设 $\langle s\rangle = \langle v_{j_0}, \cdots, v_{j_q}\rangle$, 依 (3) 式有

$$\alpha_q(\sigma_{\langle s\rangle}) = q!\sum_{i=0}^{q}(-1)^i g_{j_i} \mathrm{d}g_{j_0} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}g_{j_i}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}g_{j_q}.$$

如果 $x \in M$ 使得对于某个 $l \in \{0, \cdots, q\}, b_{j_l}(x) < \dfrac{1}{n+2}$, 那么 $x \in G_{j_l}$, 因而 g_{j_l} 和 $\mathrm{d}g_{j_l}$ 在点 x 均为零, 从而 $\alpha_q(\sigma_{\langle s\rangle})$ 在点 x 为零, 于是 $\alpha_q(\sigma_{\langle s\rangle})$ 在包含 $M - St(s)$ 的开集

$$\left\{x \in M | b_{j_l}(x) < \frac{1}{n+2} \text{ 对某个 } l \in \{0, \cdots, q\}\right\}$$

上恒等于零.

性质 (ii) 用归纳法证. 当 $q = 0$ 时, $\int_0 \circ\alpha_0(\sigma_{\langle v_j\rangle})(j = 1, \cdots, m)$ 是由

$$\left(\int_0 \circ\alpha_0(\sigma_{\langle v_j\rangle})\right)(\langle v_k\rangle) = \left(\int_0 (g_j)\right)(\langle v_k\rangle) = g_j(v_k)$$

给出的 0- 上链. 当 $k \neq j$ 时, $v_k \notin St(v_j)$ 并且在 $St(v_j)$ 之外 $g_j = 0$. 故 $g_j(v_k) = 0$. 另外, 对每个 $k(1 \leqslant k \leqslant m)$,

$$1 = \sum_{j=1}^{m} g_j(v_k) = g_k(v_k),$$

因此

$$\left(\int_0 \circ\alpha_0(\sigma_{\langle v_j\rangle})\right)(\langle v_k\rangle) = \begin{cases} 1, & \text{当 } k = j, \\ 0, & \text{当 } k \neq j. \end{cases}$$

又

$$\alpha_{\langle v_j\rangle}(\langle v_k\rangle) = \begin{cases} 1, & k=j, \\ 0, & k\neq j. \end{cases}$$

所以

$$\left(\int_0 \circ\alpha_0(\sigma_{\langle v_j\rangle})\right)(\langle v_k\rangle) = \sigma_{\langle v_j\rangle}(\langle v_k\rangle).$$

而这对所有 j 和 k 都成立, 因此 $\int_0 \circ\alpha_0 =$ 恒同.

现假定性质 (ii) 在 $q-1$ 时成立. 任取 K 的有向 q- 单形 $\langle s\rangle$ 和 $\langle t\rangle$, 需证

$$\left[\int_q \circ\alpha_q(\sigma_{\langle s\rangle})\right](\langle t\rangle) = \int_{\langle t\rangle} \alpha_q(\sigma_{\langle s\rangle}) = \begin{cases} 1, & \text{当}\langle t\rangle = \langle s\rangle, \\ 0, & \text{当}[t]\neq[s]. \end{cases}$$

先考察 $[t]\neq[s]$ 的情形. 因 $[t]\subset M-St(s)$, 由性质 (iii) 知, $\alpha_q(\sigma_{\langle s\rangle})$ 在 $M-St(s)$ 的一个邻域中恒为零, 故 $\int_{\langle t\rangle}\alpha_q(\sigma_{\langle s\rangle})=0$. 再讨论 $[t]=[s]$ 之情形, 不妨设 $\langle s\rangle = \langle v_{j_0}, v_{j_1}, \cdots, v_{j_q}\rangle, \langle r\rangle = \langle v_{j_1}, \cdots, v_{j_q}\rangle$ 为 $\langle s\rangle$ 的一个 $(q-1)$- 面, 则

$$\int_{\langle s\rangle} \alpha_q(\partial^*\sigma_{\langle r\rangle}) = \int_{\langle s\rangle} \mathrm{d}(\alpha_{q-1}(\sigma_{\langle r\rangle})) = \int_{\partial\langle s\rangle} \alpha_{q-1}(\sigma_{\langle r\rangle}). \tag{7}$$

而 $\partial\langle s\rangle = \langle r\rangle +$ 另外一些有向 $(q-1)$- 单形的交错和, 所以由归纳法

$$\int_{\partial\langle s\rangle} \alpha_{q-1}(\sigma_{\langle r\rangle}) = \int_{\langle r\rangle} \alpha_{q-1}(\sigma_{\langle r\rangle}) = 1,$$

代入 (7) 式, 并由引理 5.1.2, 得

$$1 = \int_{\langle s\rangle} \alpha_q(\partial^*\sigma_{\langle r\rangle}) = \int_{\langle s\rangle} \alpha_q\left(\sigma_{\langle s\rangle} + \sum_{\substack{[t]\neq[s]\\ [t]\in K}} \sigma_{\langle t\rangle}\right) = \int_{\langle s\rangle} \alpha_q(\sigma_{\langle s\rangle}).$$

引理 5.2.3 设 ω 是 M 上的一个闭 q- 形式. 假设对于某一个 $c\in C^{q-1}(K,\mathbb{R})$, $\int_q(\omega) = \partial^* c$, 那么存在 M 上的一个 $(q-1)$- 形式 τ, 使得 $\int_{q-1}(\tau) = c$ 并且 $\mathrm{d}\tau = \omega$.

证明 用归纳法, 归纳地构作一列光滑 $(q-1)$- 形式

$$\tau_0, \tau_1 \cdots, \tau_n = \tau,$$

其中 $n = \dim M$, 使得

(i) τ_k 定义在 K 的 k- 骨架 K^k 所对应的 $[K^k]$ 的一个邻域内, 并且满足 $\mathrm{d}\tau_k = \omega$.

(ii) 在 $[K^{k-1}]$ 的一邻域内, $\tau_k = \tau_{k-1}$,

(iii) $\int_{q-1}(\tau_{q-1}) = c$.

由此本引理将得证. 这是因为 (iii) 可导出对于 K 的每个有向 $(q-1)$- 单形 $\langle s\rangle$ 及任意 $k \geqslant q-1$,

$$\left(\int_{q-1}(\tau_k)\right)(\langle s\rangle) = \int_{\langle s\rangle} \tau_k = \int_{\langle s\rangle} \tau_{q-1} = \left(\int_{q-1}(\tau_{q-1})\right)(\langle s\rangle) = c(\langle s\rangle).$$

为构作 τ_0, 用互不相交的一些球将 K 的 0- 骨架 K^0 覆盖. 因为 ω 是闭形式, 据 Poincaré 引理, ω 在每一个这样的球内都是恰当的, 因此存在一个光滑 $(q-1)$- 形式 τ_0', 定义在这些球的并集上, 使得在其上有 $\mathrm{d}\tau_0' = \omega$. 若 $q-1 \neq 0$, 令 $\tau_0 = \tau_0'$. 若 $q-1=0$, 还要求 $\int_0(\tau_0) = c$. 注意对 K 的顶点 v_j,

$$\left(\int_0(\tau_0')\right)(\langle v_j\rangle) = \int_{\langle v_j\rangle} \tau_0' = \tau_0'(v_j).$$

设 $a_j = c(v_j) - \tau_0'(v_j)$, 并且在围绕点 v_j 的球内定义 $\tau_0 = \tau_0' + a_j$, 则在 $[K^0]$ 的一邻域内, $\mathrm{d}\tau_0 = \mathrm{d}\tau_0' = \omega$, 并且 $\int_0(\tau_0) = c$.

现假定已构作 τ_{k-1} 具有性质 (i),(ii),(iii), 下面来构作 τ_k. 假如对每个 k- 单形 $[s]$ 能找到一个定义于 $[s]$ 的一个邻域中的光滑 $(q-1)$- 形式 $\tau_k(s)$, 使得在该邻域内 $\mathrm{d}(\tau_k(s)) = \omega$, 并且在 $[s^{k-1}]$ 的一邻域内 $\tau_k(s) = \tau_{k-1}$, 那么将诸 $\tau_k(s)$ 粘合便得到一个光滑 $(q-1)$- 形式 τ_k' 满足性质 (i) 和 (ii).

为构作 $\tau_k(s)$, 将应用引理 5.2.1 中的 (b_q). 现在 ω 是 $[s]$ 的一邻域内的光滑闭 q- 形式, τ_{k-1} 是 $[s^{k-1}]$ 的一邻域内的光滑 $(q-1)$- 形式, 并且在该邻域内 $\mathrm{d}\tau_{k-1} = \omega$. 此外, 若 $k=q$, 利用假设条件得

$$\int_{\langle s\rangle} \omega = \int_q(\omega)(\langle s\rangle) = \partial^* c(\langle s\rangle) = c(\partial\langle s\rangle) = \int_{k-1}(\tau_{k-1})(\partial\langle s\rangle) = \int_{\partial\langle s\rangle} \tau_{k-1},$$

于是可应用 (b_q), 存在 $[s]$ 的邻域内的光滑 $(q-1)$- 形式 $\tau_k(s)$ 使得 $\mathrm{d}(\tau_k(s)) = \omega$ 并且在 $[s^{k-1}]$ 的一邻域内, $\tau_k(s) = \tau_{k-1}$.

依前面的分析, 得到了满足性质 (i), (ii) 的光滑 $(q-1)$- 形式 τ_k'. 如果 $k \neq q-1$, 那么令 $\tau_k = \tau_k'$. 如果 $k = q-1$, 还希望有 $\int_{q-1}(\tau_{q-1}) = c$. 为此设 $c_1 = c - \int_{q-1}(\tau_{q-1}')$, 并在 $[K^{q-1}]$ 的一个邻域内定义

$$\tau_{q-1} = \tau_{q-1}' + \alpha_{q-1}(c_1),$$

其中 α_{q-1} 是引理 5.2.2 中所规定的线性映射 $\alpha_{q-1}: C^{q-1}(K,\mathbb{R}) \to A^{q-1}(M)$. 下面证明 τ_{q-1} 具有性质 (i), (ii) 和 (iii).

按照引理 5.2.2, 对每个 r 和每个有向 r- 单形 $\langle s\rangle, \alpha_r(\sigma_{\langle s\rangle})$ 在 $M - St(s)$ 的一个邻域中恒等于零. 特别, $\alpha_r(\sigma_{\langle s\rangle})$ 在 $[K^{r-1}]$ 的某个邻域内恒等于零. 因为任意的 $c \in C^r(K,\mathbb{R})$ 是这样的诸 $\sigma_{\langle s\rangle}$ 的线性组合, 所以 $\alpha_r(c)$ 在 $[K^{r-1}]$ 的邻域内恒等于零. 将此结果首先应用于 $r = q$, 然后应用于 $r = q-1$, 得到在 $[K^{q-1}]$ 的一个邻域内,

$$\mathrm{d}\tau_{q-1} = \mathrm{d}\tau'_{q-1} + \mathrm{d} \circ \alpha_{q-1}(c_1) = \mathrm{d}\tau'_{q-1} + \alpha_q \circ \partial^*(c_1) = \mathrm{d}\tau'_{q-1} = \omega,$$

并且在 $[K^{q-2}]$ 的一个邻域内,

$$\tau_{q-1} = \tau'_{q-1} + \alpha_{q-1}(c_1) = \tau'_{q-1} = \tau_{q-2},$$

这说明 τ_{q-1} 满足性质 (i) 和 (ii). 又

$$\int_{q-1} (\tau_{q-1}) = \int_{q-1} (\tau'_{q-1}) + \int_{q-1} \circ \alpha_{q-1}(c_1) = (c - c_1) + c_1 = c,$$

说明 τ_{q-1} 还满足性质 (iii). 引理得证.

由本引理可推出 $\widetilde{\int_q}$ 是单同态, 这是因为: 如果 $\omega \in Z^q_{\mathrm{d}}(M,\mathbb{R})$, 并且 $\int_q(\omega) \in B^q(K,\mathbb{R})$, 则由引理 5.2.3, $\omega \in B^q_{\mathrm{d}}(M,\mathbb{R})$. 因此引理 5.2.2 和引理 5.2.3 合起来推出了 de Rham 定理.

应用 de Rham 同构定理, 通过计算流形的单纯同调群便可以获得流形的 de Rham 同调群, 因为前者便于处理, 容易计算些. 例如计算环面 T 的单纯同调群 (留作练习) 便得到环面的 de Rham 上同调群为

$$H^0_{\mathrm{d}}(T,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}, H^1_{\mathrm{d}}(T,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, H^2_{\mathrm{d}}(T,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}.$$

5.3 Hodge 定 理

本节将引入作用在微分形式上的算子 Δ, 它是通常作用在光滑函数上的拉普拉斯算子 $(-1)\sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_i^2}$ 的推广. 满足方程 $\Delta\omega = 0$ 的微分形式叫做**调和形式**. 本节讨论的对象是可定向的紧致黎曼流形 M. 在得到 Hodge 分解定理 (的一种形式) 后, 证明方程 $\Delta\omega = \alpha$ 有 M 上的 p- 形式解 ω 的充要条件是 p- 形式 α 正交于 M 上的调和 p- 形式所成的空间, 并且还证明了 M 上的 de Rham 上同调群的每一个上同调类包含唯一的调和形式, 由此得到 de Rham 上同调的 Poincaré对偶性定理.

5.3.1 星形算子

首先在实内积空间引入星形算子. 设 V 是 m 维实向量空间, 带有内积 $\langle , \rangle$. 设 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ 是 V 的规范正交基, 它确定 V 的一个定向. 内积 $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ 可诱导自然同构

$$\varphi : V \to V^*, v \mapsto \varphi_v,$$

这里 $\varphi_v : V \to \mathbb{R}$ 定义为 $\varphi_v(w) = \langle v, w \rangle$. 规定 V^* 的内积 (仍记为 $\langle , \rangle$) 为 $\langle \varphi_{v_1}, \varphi_{v_2} \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle, v_1, v_2 \in V$. 易见 V 的规范正交基 $e_1, \cdots, e_m$ 的对偶基 $\omega_1, \cdots, \omega_m$ 是对偶空间 V^* 的规范正交基, $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m$ 位于由 V 的定向所决定的 $\Lambda^m(V^*) - \{0\}$ 的连通分支中. 现在我们把 V 上的内积扩充为外代数 $\Lambda(V^*)$ 上的内积.

设 $\xi \in \Lambda^p(V^*), \eta \in \Lambda^q(V^*), 1 \leqslant p, q \leqslant m$. 如果 $p \neq q$, 令 $\langle \xi, \eta \rangle = 0$; 如果 $p = q$, 设 $\xi = \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_p, \eta = \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_p, \xi_i, \eta_j \in \Lambda^1(V^*)$, 规定

$$\langle \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_p, \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_p \rangle = \det(\langle \xi_i, \eta_j \rangle)$$

然后再双线性地扩张到整个 $\Lambda^p(V^*)$ 上.

当 $1 \leqslant p \leqslant m$ 时, $\{\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p} | 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant m\}$ 构成 $\Lambda^p(V^*)$ 的规范正交基. 事实上, 我们有

$$\langle \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p}, \omega_{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_p} \rangle = \det(\langle \omega_{i_s}, \omega_{j_t} \rangle)$$

$$= \begin{cases} 1, & (i_1, \cdots, i_p) = (j_1, \cdots, j_p) \\ 0, & (i_1, \cdots, i_p) \neq (j_1, \cdots, j_p). \end{cases}$$

定义 5.3.1 设 V 是一个定向的内积空间, $e_1, \cdots, e_m$ 为 V 的规范正交基, 其对偶基为 $\omega_1, \cdots, \omega_m$. 定义**星形算子** $* : \Lambda^p(V^*) \to \Lambda^{m-p}(V^*)$ 为线性变换, 使得

$$*(\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p}) = \omega_{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_m},$$

其中 $\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p} \wedge \omega_{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_m}$ 应合于已知定向.

特别, $*(1) = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m, \quad *(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m) = 1$.

例如, 当 $m = 5$ 时, 因 $\omega_3 \wedge \omega_1 \wedge \omega_5 \wedge \omega_2 \wedge \omega_4 = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \wedge \omega_4 \wedge \omega_5$, 故 $*(\omega_3 \wedge \omega_1 \wedge \omega_5) = \omega_2 \wedge \omega_4$.

命题 5.3.1 在 $\Lambda^p(V^*)$ 上, $** = (-1)^{p(m-p)}$.

证明 设 $\omega \in \Lambda^p(V^*)$, 只须就 $\omega = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p$ 讨论即可. 因

$$\omega_{p+1} \wedge \cdots \wedge \omega_m \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = (-1)^{p(m-p)} \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \wedge \omega_{p+1} \wedge \cdots \wedge \omega_m,$$

故

$$**\omega = *(\omega_{p+1} \wedge \cdots \wedge \omega_m) = (-1)^{p(m-p)}\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p = (-1)^{p(m-p)}\omega,$$

因此在 $\Lambda^p(V^*)$ 上, $** = (-1)^{p(m-p)}$.

命题 5.3.2 设 $\xi, \eta \in \Lambda^p(V^*)$, 则它们的内积 $\langle \xi, \eta \rangle$ 可表示为

$$\langle \xi, \eta \rangle = *(\xi \wedge *\eta) = *(\eta \wedge *\xi).$$

证明 设 $\xi = \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant m} a_{i_1 \cdots i_p}\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p}, \eta = \sum\limits_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_p \leqslant m} b_{j_1 \cdots j_p}\omega_{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_p}$. 因 $\{\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p} | 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant m\}$ 是 $\Lambda^p(V^*)$ 的规范正交基, 故

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant m} a_{i_1 \cdots i_p} b_{i_1 \cdots i_p}.$$

而 $*\eta = \sum b_{j_1 \cdots j_p} *(\omega_{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_p})$. 假定 $\omega_{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_p} \wedge \omega_{j_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_m} = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m$, 则

$$*\eta = \sum b_{j_1 \cdots j_p}\omega_{j_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_m},$$
$$\xi \wedge *\eta = \sum\sum a_{i_1 \cdots i_p} b_{j_1 \cdots j_p}\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p} \wedge \omega_{j_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_m}.$$

由于 $j_1 < \cdots < j_p$, 只有当 $i_1 = j_1, \cdots, i_p = j_p$ 时, $\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_p} \wedge \omega_{j_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_m}$ 才不为零, 所以

$$\begin{aligned}
\xi \wedge *\eta &= \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_p \leqslant m} a_{j_1 \cdots j_p} b_{j_1 \cdots j_p}\omega_{j_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_p} \wedge \omega_{j_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \omega_{j_m} \\
&= \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_p \leqslant m} a_{j_1 \cdots j_p} b_{j_1 \cdots j_p}\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_m, \\
*(\xi \wedge *\eta) &= \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_p \leqslant m} a_{j_1 \cdots j_p} b_{j_1 \cdots j_p} = \langle \xi, \eta \rangle.
\end{aligned}$$

同理可证 $\langle \xi, \eta \rangle = *(\eta \wedge *\xi)$.

现在将星形算子引入到流形中. 以下总假定 M 是 m 维可定向的紧致黎曼流形. 由 4.2 节关于黎曼流形上的积分的讨论知, 在每一个坐标邻域上, 不仅有局部定向的规范正交标架场, 而且有局部定向的规范正交余标架场, 因此对于 M 中的每一点 q, 在 $\Lambda(T_q^*M)$ 上可以定义星形算子 $*$, 而且不难看出, 算子 $*$ 将光滑形式映为光滑形式, 因而我们有线性算子

$$*: A^p(M) \to A^{m-p}(M),$$

并且依命题 5.3.1, 算子 $*$ 满足

$$**=(-1)^{p(m-p)}. \tag{1}$$

进而我们在 $A^p(M)$ 上引入内积. 由命题 5.3.2 自然想到定义如下: 设 $\omega,\tau\in A^p(M)$, ω 与 τ 的内积 $\langle\omega,\tau\rangle$ 定义为

$$\langle\omega,\tau\rangle=\int_M \omega\wedge *\tau. \tag{2}$$

从 (2) 式可知, $\langle,\rangle: A^p(M)\times A^p(M)\to\mathbb{R}$ 是双线性的, 并且由命题 5.3.2 可推出 $\langle,\rangle$ 是对称正定的. 我们还可以将 $A^p(M)(0\leqslant p\leqslant m)$ 上定义的内积扩张到直和 $A(M)=\sum\limits_{p=0}^{m}A^p(M)$ 上, 只需补充规定: 对于 $\omega\in A^p(M),\tau\in A^q(M)$, 当 $p\neq q$ 时, $\langle\omega,\tau\rangle=0$, 即要求诸 $A^p(M)$ 彼此正交.

5.3.2 Laplace-Beltrami 算子

定义 5.3.2　对 $0<p\leqslant m$, 算子 $\delta: A^p(M)\to A^{p-1}(M)$ 定义为

$$\delta=(-1)^{m(p+1)+1}*\mathrm{d}*,$$

而在 0- 形式上, 规定 δ 为零线性泛函.

Laplace-Beltrami 算子 Δ 定义为

$$\Delta=\delta\mathrm{d}+\mathrm{d}\delta.$$

显然, 对每一 $p: 0\leqslant p\leqslant m, \Delta: A^p(M)\to A^p(M)$ 是一个线性算子.

命题 5.3.3　算子 δ, Δ 有下列性质: 在 $A^p(M)$ 上,

(i) $(-1)^{p+1}\delta*=*\mathrm{d}$,

(ii) $(-1)^p\mathrm{d}*=*\delta$,

(iii) $*\Delta=\Delta*$.

证明　仅证 (iii), (i), (ii) 留给读者. 设 $\omega\in A^p(M)$, 则

$$\begin{aligned}\Delta*(\omega)&=(\delta\mathrm{d}+\mathrm{d}\delta)*(\omega)=\delta(\mathrm{d}*)(\omega)+\mathrm{d}(\delta*)(\omega)\\&=(-1)^p\delta(*\delta)(\omega)+(-1)^{p+1}\mathrm{d}(*\mathrm{d})(\omega)\\&=(-1)^p\delta*(\delta(\omega))+(-1)^{p+1}\mathrm{d}*(\mathrm{d}(\omega)).\end{aligned}$$

因 $\delta(\omega)\in A^{p-1}(M)$, $\mathrm{d}(\omega)\in A^{p+1}(M)$, 故

$$\Delta*(\omega)=(-1)^p(-1)^p*\mathrm{d}\delta(\omega)+(-1)^{p+1}(-1)^{p+1}*\delta\mathrm{d}(\omega)$$

$$= *(\mathrm{d}\delta + \delta\mathrm{d})(\omega) = *\Delta(\omega).$$

由于 $\omega \in A^p(M)$ 是任取的, 所以 $\Delta * = *\Delta$.

定义 5.3.3 给定线性算子 $T : A(M) \to A(M)$. 如果存在另一个线性算子 $T^* : A(M) \to A(M)$, 使得对于任意 $\alpha, \beta \in A(M)$, 有

$$\langle T\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, T^*\beta\rangle,$$

那么 T^* 叫做 T 的**伴随算子**.

伴随性是相互的, 即如果 T^* 是 T 的伴随算子, 那么 T 也是 T^* 的伴随算子. 但一个线性算子的伴随算子却是唯一的, 理由如下. 假设 T_1^*, T_2^* 都是 T 的伴随算子, 那么对于任意 $\alpha, \beta \in A(M)$,

$$\langle T\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, T_1^*\beta\rangle = \langle \alpha, T_2^*\beta\rangle,$$

因此 $\langle \alpha, (T_1^* - T_2^*)\beta\rangle = 0$. 由 α, β 的任意性得到 $T_1^* = T_2^*$.

命题 5.3.4 在 $A(M)$ 上, δ 是外微分算子 d 的伴随算子, 即

$$\langle \mathrm{d}\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, \delta\beta\rangle, \quad \alpha, \beta \in A(M).$$

证明 依线性与正交性, 证明简化为考虑下列情形: α 为 $(p-1)$- 形式, β 为 p- 形式. 此时

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\alpha \wedge *\beta) &= \mathrm{d}\alpha \wedge *\beta + (-1)^{p-1}\alpha \wedge \mathrm{d} * \beta \\ &= \mathrm{d}\alpha \wedge *\beta - \alpha \wedge *\delta\beta. \end{aligned}$$

等式两边在 M 上取积分, 得

$$\int_M \mathrm{d}(\alpha \wedge *\beta) = \int_M (\mathrm{d}\alpha \wedge *\beta - \alpha \wedge *\delta\beta) = \langle \mathrm{d}\alpha, \beta\rangle - \langle \alpha, \delta\beta\rangle.$$

而由命题 4.4.1 知, 上式左边为零, 故 $\langle \mathrm{d}\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, \delta\beta\rangle$.

推论 5.3.1 算子 δ 满足 $\delta\delta = 0$.

证明 设 $\omega \in A^p(M), \tau \in A^{p-2}(M)$, 则

$$\langle \tau, \delta\delta\omega\rangle = \langle \mathrm{d}\tau, \delta\omega\rangle = \langle \mathrm{d}\mathrm{d}\tau, \omega\rangle = 0,$$

故 $\delta\delta = 0$.

推论 5.3.2 算子 Δ 具有下列性质:

(i) Δ 是自伴 (随) 算子, 即对于 $\omega, \tau \in A^p(M), 0 \leqslant p \leqslant m$, 有 $\langle \Delta\omega, \tau\rangle = \langle \omega, \Delta\tau\rangle$.

(ii) 算子 Δ 与 d, δ 可交换, 即 $\Delta\mathrm{d} = \mathrm{d}\Delta, \Delta\delta = \delta\Delta$.

证明 (i) $\langle\Delta\omega,\tau\rangle=\langle\delta\mathrm{d}\omega,\tau\rangle+\langle\mathrm{d}\delta\omega,\tau\rangle=\langle\omega,\delta\mathrm{d}\tau\rangle+\langle w,\mathrm{d}\delta\tau\rangle=\langle\omega,\Delta\tau\rangle$.

(ii) $\Delta\mathrm{d}=(\delta\mathrm{d}+\mathrm{d}\delta)\mathrm{d}=\mathrm{d}\delta\mathrm{d}=\mathrm{d}\Delta, \Delta\delta=(\delta\mathrm{d}+\mathrm{d}\delta)\delta=\delta\mathrm{d}\delta=\delta\Delta$.

命题 5.3.5 $\Delta\omega=0$ 当且仅当 $\mathrm{d}\omega=0,\delta\omega=0$.

证明 若 $\mathrm{d}\omega=0$ 且 $\delta\omega=0$, 显然 $\Delta\omega=0$. 反之, 若 $\Delta\omega=0$, 则

$$0=\langle\Delta\omega,\omega\rangle=\langle\mathrm{d}\delta\omega,\omega\rangle+\langle\delta\mathrm{d}\omega,\omega\rangle=\langle\delta\omega,\delta\omega\rangle+\langle\mathrm{d}\omega,\mathrm{d}\omega\rangle,$$

因此 $\langle\delta\omega,\delta\omega\rangle=0$, $\langle\mathrm{d}\omega,\mathrm{d}\omega\rangle=0$ 必有 $\delta\omega=0$ 且 $\mathrm{d}\omega=0$.

作为练习, 读者验证在 $A^0(\mathbb{R}^3)$ 上, $\Delta=-\sum\limits_{i=1}^{3}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, 这与通常的拉普拉斯算子相一致.

5.3.3 Hodega 定理

设 M 是 m 维可定向的紧致黎曼流形. 对 $0\leqslant p\leqslant m$, 令

$$H^p=\{\omega\in A^p(M)|\Delta\omega=0\},$$

H^p 的元素叫做 M 上的**调和 p - 形式**. H^p 是 $\Delta: A^p(M)\to A^p(M)$ 的核. Δ 的像 $\mathrm{Im}\Delta=\Delta(A^p(M))=(\mathrm{d}\delta+\delta\mathrm{d})(A^p(M))=\mathrm{d}\delta(A^p(M))+\delta\mathrm{d}(A^p(M))$. 令

$$D^p=\mathrm{d}(A^{p-1}(M))=\{\omega\in A^p(M)|\ \text{存在}\ \tau\in A^{p-1}(M)\ \text{使得}\ \omega=\mathrm{d}\tau\},$$

$$E^p=\delta(A^{p+1}(M))=\{\omega\in A^p(M)|\ \text{存在}\ \eta\in A^{p+1}(M)\ \text{使得}\ \omega=\delta\eta\}.$$

定理 5.3.1 $A^p(M)=D^p\oplus E^p\oplus H^p$.

证明 首先指出 H^p,D^p,E^p 彼此正交. 为此任取 $\omega\in H^p$, $\mathrm{d}\tau\in D^p$, $\delta\eta\in E^p$, 则 $\langle\omega,\mathrm{d}\tau\rangle=\langle\delta\omega,\tau\rangle=0$, $\langle\omega,\delta\eta\rangle=\langle\mathrm{d}\omega,\eta\rangle=0$, $\langle\mathrm{d}\tau,\delta\eta\rangle=\langle\mathrm{d}\mathrm{d}\tau,\eta\rangle=0$, 所以 $H^p\perp D^p,H^p\perp E^p,D^p\perp E^p$, 并且 $H^p\cap D^p=\{0\}$, $H^p\cap E^p=\{0\}$, $D^p\cap E^p=\{0\}$. 因此有

$$A^p(M)\supset D^p\oplus E^p\oplus H^p.$$

其次, 若 $\omega\in A^p(M)$ 使得 $\omega\perp H^p,\omega\perp D^p$ 和 $\omega\perp E^p$, 则 $\omega=0$. 这是因为: 由 $\omega\perp D^p$ 可得出对每一 $\tau\in A^{p-1}(M),0=\langle w,\mathrm{d}\tau\rangle=\langle\delta\omega,\tau\rangle$, 于是 $\delta\omega=0$. 而由 $\omega\perp E^p$ 又得到对每一 $\eta\in A^{p+1}(M),0=\langle w,\delta\eta\rangle=\langle\mathrm{d}\omega,\eta\rangle$, 从而 $\mathrm{d}\omega=0$. 依命题 5.3.5, $\Delta\omega=0$ 即 $\omega\in H^p$. 又 $\omega\perp H^p$, 故 $\langle\omega,\omega\rangle=0$, 这说明 $\omega=0$. 这样一来, 我们有

$$A^p(M)=D^p\oplus E^p\oplus H^p.$$

Hodge 分解定理有如下更精细的形式.

定理 5.3.1′ 对每一 $p, 0 \leqslant p \leqslant m$, M 上的光滑 p- 形式空间 $A^p(M)$ 的子空间 H^p 是有限维的, 并且 $A^p(M)$ 有下列正交直和分解

$$\begin{aligned} A^p(M) &= \Delta(A^p(M)) \oplus H^p \\ &= \mathrm{d}\delta(A^p(M)) \oplus \delta\mathrm{d}(A^p(M)) \oplus H^p \\ &= D^p \oplus E^p \oplus H^p. \end{aligned}$$

注 $A^p(M)$ 是环 $C^\infty(M)$ 上的模. 如果作为实向量空间, 它是无穷维的. 断言 H^p 作为 $A^p(M)$ 的子空间是有限维的并非显然, 证起来也不容易. 其次, 对 $A^p(M)$ 作正交直和分解

$$A^p(M) = (H^p)^\perp \oplus H^p,$$

其中 $(H^p)^\perp$ 是 $A^p(M)$ 的子空间, 它是由正交于 H^p 的所有元素组成. 该定理需证 $(H^p)^\perp = \Delta(A^p(M))$. 而 $\Delta(A^p(M)) \subset (H^p)^\perp$ 容易导出, 但证明反包含关系 $(H^p)^\perp \subset \Delta(A^p(M))$ 颇难. 本定理的严格证明请参看文献 [23] 或 [15].

由定理 5.3.1, 每一 $\omega \in A^p(M)$ 可表示为

$$\omega = \mathrm{d}\alpha + \delta\beta + \gamma,\ \alpha \in A^{p-1}(M),\ \beta \in A^{p+1}(M),\ \gamma \in H^p, \tag{3}$$

γ 称为 ω 的**调和部分**.

令 $H : A^p(M) \to H^p$ 为投影算子, 使得 $H(\omega)$ 是 ω 的调和部分. 显然 H 是到上的, 并且 $H^2 = H$.

定理 5.3.2 方程 $\Delta\omega = \alpha$ 有解 $\omega \in A^p(M)$ 当且仅当光滑 p- 形式 α 正交于调和 p- 形式空间 H^p.

证明 $\Longrightarrow$ 若 $\Delta\omega = \alpha$ 有解 $\omega \in A^p(M)$, 则对任意 $\gamma \in H^p$,

$$\langle\alpha, \gamma\rangle = \langle\Delta\omega, \gamma\rangle = \langle\omega, \Delta\gamma\rangle = 0.$$

因此 $\alpha \perp H^p$.

$\Longleftarrow$ $\alpha \perp H^p$ 说明 α 的调和部分 $H(\alpha) = 0$, 因而依 (3) 式,

$$\alpha = \mathrm{d}\alpha_1 + \delta\beta_1,\ \alpha_1 \in A^{p-1}(M), \beta_1 \in A^{p+1}(M).$$

又一次利用 (3) 式, 设

$$\alpha_1 = \mathrm{d}\alpha_2 + \delta\beta_2 + \gamma_2,\ \alpha_2 \in A^{p-2}(M),\ \beta_2 \in A^p(M), \gamma_2 \in H^{p-1},$$

则

$$\mathrm{d}\alpha_1 = \mathrm{d}\mathrm{d}\alpha_2 + \mathrm{d}\delta\beta_2 + \mathrm{d}\gamma_2 = \mathrm{d}\delta\beta_2.$$

再令 $\beta_2 = \mathrm{d}\alpha_3 + \delta\beta_3 + \gamma_3, \alpha_3 \in A^{p-1}(M), \beta_3 \in A^{p+1}(M), \gamma_3 \in H^p$, 则 $\delta\beta_2 = \delta\mathrm{d}\alpha_3 + \delta^2\beta_3 + \delta\gamma_3 = \delta\mathrm{d}\alpha_3$, 所以

$$\mathrm{d}\alpha_1 = \mathrm{d}\delta\mathrm{d}\alpha_3 = \Delta(\mathrm{d}\alpha_3).$$

同理, 设 $\beta_1 = \mathrm{d}\alpha_4 + \delta\beta_4 + \gamma_4, \alpha_4 \in A^p(M), \beta_4 \in A^{p+2}(M), \gamma_4 \in H^{p+1}$, 则 $\delta\beta_1 = \delta\mathrm{d}\alpha_4$. 再设 $\alpha_4 = \mathrm{d}\alpha_5 + \delta\beta_5 + \gamma_5$, $\alpha_5 \in A^{p-1}(M)$, $\beta_5 \in A^{p+1}(M), \gamma_5 \in H^p$, 则 $\mathrm{d}\alpha_4 = \mathrm{d}\delta\beta_5$. 因此

$$\delta\beta_1 = \delta\mathrm{d}\delta\beta_5 = \Delta(\delta\beta_5).$$

于是

$$\alpha = \mathrm{d}\alpha_1 + \delta\beta_1 = \Delta(\mathrm{d}\alpha_3 + \delta\beta_5), \quad \alpha_3 \in A^{p-1}(M), \beta_5 \in A^{p+1}(M).$$

这说明 $\omega = \mathrm{d}\alpha_3 + \delta\beta_5$ 是方程 $\Delta\omega = \alpha$ 的解.

定义 5.3.4　映射 $G : A^p(M) \to (H^p)^\perp$ 定义如下：令 $G(\alpha)$ 等于方程 $\Delta\omega = \alpha - H(\alpha)$ 在 $(H^p)^\perp$ 中的唯一解, 我们把 G 叫做**格林 (Green) 算子**.

为了解算子 G 的特性, 先介绍下面的命题.

命题 5.3.6　若线性算子 $T : A^p(M) \to A^q(M)$ 与算子 Δ 可换, 则 T 与 G 亦可换.

证明　依 G 的定义, $G = (\Delta|(H^p)^\perp)^{-1} \circ \pi_{(H^p)^\perp}$, 其中 $\pi_{(H^p)^\perp} : A^p(M) \to (H^p)^\perp$ 为投影. 由假设 $T\Delta = \Delta T$ 可导出 $T(H^p) \subset H^q$. 又因 $(H^p)^\perp = \Delta(A^p(M))$, 可推出 $T((H^p)^\perp) \subset (H^q)^\perp$, 于是有

$$T \circ \pi_{(H^p)^\perp} = \pi_{(H^q)^\perp} \circ T.$$

并且在 $(H^p)^\perp$ 上,

$$\begin{aligned} T \circ (\Delta|(H^p)^\perp) &= (\Delta|(H^q)^\perp) \circ T, \\ T \circ (\Delta|(H^p)^\perp)^{-1} &= (\Delta|(H^q)^\perp)^{-1} \circ T, \\ T \circ (\Delta|(H^p)^\perp)^{-1} \circ \pi_{(H^p)^\perp} &= (\Delta|(H^q)^\perp)^{-1} \circ T \circ \pi_{(H^p)^\perp} \\ &= (\Delta|(H^q)^\perp)^{-1} \circ \pi_{(H^q)^\perp} \circ T, \end{aligned}$$

即 $T \circ G = G \circ T$.

本命题证明用到了定理 5.3.1′. 请读者思考：不用定理 5.3.1′ 而用定理 5.3.1 及格林算子 G 给出该命题的另一证法, 提示如下：设 $\omega = H(\omega) + \Delta(G(\omega))$, 先证 $HT(\omega) = TH(\omega)$, 再证 $GT(\omega) = TG(\omega)$.

另外, 由命题 5.3.3(iii) 及推论 5.3.2(ii) 知, $*, \mathrm{d}, \delta$ 均与 Δ 可换, 因此由命题 5.3.6 立即有下面的

推论 5.3.3 G 与 $*, \mathrm{d}, \delta$ 均可交换.

定理 5.3.3 可定向的紧致黎曼流形 M 的 de Rham 上同调群的每一个上同调类包含唯一的调和形式.

证明 设 α 是 M 上的任意光滑 p- 形式. 由定理 5.3.1 及格林算子 G 的定义可知 $\alpha = H\alpha + \Delta G\alpha = H\alpha + \mathrm{d}\delta G\alpha + \delta \mathrm{d} G\alpha$. 因 G 与 d 可换, 故 $\alpha = H\alpha + \mathrm{d}\delta G\alpha + \delta G \mathrm{d}\alpha$.

现设 $\langle\alpha\rangle \in H_{\mathrm{d}}^p(M,\mathbb{R})(0 \leqslant p \leqslant \dim M)$, 则 α 是光滑闭 p- 形式, $\mathrm{d}\alpha = 0$. 于是

$$\alpha = H\alpha + \mathrm{d}(\delta G\alpha),$$

它表示调和 p- 形式 $H\alpha$ 与 α 属于相同的 de Rham 上同调类, 即 $\langle H\alpha\rangle = \langle\alpha\rangle$. 这说明 M 的每一个 de Rham 上同调类中包含有调和形式.

下证唯一性. 假设有两个调和 p- 形式 γ_1 和 γ_2 属于相同的 de Rham 上同调类, 那么有

$$\gamma_1 - \gamma_2 = \mathrm{d}\tau, \quad \tau \in A^{p-1}(M).$$

注意 $\gamma_1 - \gamma_2$ 仍为调和 p- 形式, 依命题 5.3.5, $\delta(\gamma_1 - \gamma_2) = 0$. 作内积

$$\langle \mathrm{d}\tau, \gamma_1 - \gamma_2\rangle = \langle \tau, \delta(\gamma_1 - \gamma_2)\rangle = \langle \tau, 0\rangle = 0,$$

于是 $\mathrm{d}\tau = \gamma_1 - \gamma_2 = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2$. 定理得证.

下面介绍该定理的一个应用. 假设 M 是一个 m 维可定向的紧致微分流形. 定义双线性函数

$$B : H_{\mathrm{d}}^p(M,\mathbb{R}) \times H_{\mathrm{d}}^{m-p}(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

如下: 对于 $\langle\alpha\rangle \in H_{\mathrm{d}}^p(M,\mathbb{R})$, $\langle\beta\rangle \in H_{\mathrm{d}}^{m-p}(M,\mathbb{R})$, 令

$$B(\langle\alpha\rangle, \langle\beta\rangle) = \int_M \alpha \wedge \beta. \tag{4}$$

该定义是合理的, 与上同调类的代表选取无关. 例如, 若 α_1 是上同调类 $\langle\alpha\rangle$ 的另一代表, 则 $\alpha_1 = \alpha + \mathrm{d}\tau, \tau \in A^{p-1}(M)$. 我们有

$$\begin{aligned}\int_M \alpha_1 \wedge \beta &= \int_M \alpha \wedge \beta + \int_M \mathrm{d}\tau \wedge \beta \\ &= \int_M \alpha \wedge \beta + \int_M \mathrm{d}(\tau \wedge \beta) - (-1)^{p-1} \int_M \tau \wedge \mathrm{d}\beta \\ &= \int_M \alpha \wedge \beta,\end{aligned}$$

这里 $\int_M \mathrm{d}(\tau \wedge \beta) = 0$ 是根据命题 4.4.1, 而 $\int_M \tau \wedge \mathrm{d}\beta = 0$ 是因为 $\mathrm{d}\beta = 0$.

下一定理是关于 m 维紧致有向流形 M 的 de Rham 上同调的 Poincaré 对偶性.

定理 5.3.4 由 (4) 式定义的双线性函数 B 是非奇异的, 由此可确定 $H_{\mathrm{d}}^p(M,\mathbb{R})$ 与 $H_{\mathrm{d}}^{m-p}(M,\mathbb{R})$ 的对偶空间之间的同构:

$$H_{\mathrm{d}}^p(M,\mathbb{R}) \cong (H_{\mathrm{d}}^{m-p}(M,\mathbb{R}))^*.$$

证明 欲证 (4) 式定义的双线性函数 B 是非奇异的, 需证对任意非零上同调类 $\langle\alpha\rangle \in H_{\mathrm{d}}^p(M,\mathbb{R})$, 能找到一个非零上同调类 $\langle\beta\rangle \in H_{\mathrm{d}}^{m-p}(M,\mathbb{R})$, 使得 $B(\langle\alpha\rangle,\langle\beta\rangle) \neq 0$.

因为任何微分流形可赋予黎曼结构, 对流形 M 选取一个黎曼结构使之成为黎曼流形. 按照定理 5.3.3, 可以假定 α 是 $\langle\alpha\rangle$ 的调和代表. 因为上同调类 $\langle\alpha\rangle \neq 0$, 所以 α 不恒等于 0. 而算子 Δ 与 $*$ 可换, 即 $*\Delta = \Delta*$, 因此 $*\alpha$ 也是调和形式. 据命题 5.3.5, $*\alpha$ 是闭 $(m-p)$- 形式, 它是上同调类 $\langle *\alpha\rangle \in H_{\mathrm{d}}^{m-p}(M,\mathbb{R})$ 的一个代表. 而

$$B(\langle\alpha\rangle,\langle *\alpha\rangle) = \int_M \alpha \wedge *\alpha = \langle\alpha,\alpha\rangle \neq 0,$$

故 B 是非奇异的. 现令

$$\varphi : H_{\mathrm{d}}^p(M,\mathbb{R}) \to (H_{\mathrm{d}}^{m-p}(M,\mathbb{R}))^*$$

定义为

$$\varphi(\langle\alpha\rangle)(\langle\beta\rangle) = \int_M \alpha \wedge \beta, \quad \langle\alpha\rangle \in H_{\mathrm{d}}^p(M,\mathbb{R}), \quad \langle\beta\rangle \in H_{\mathrm{d}}^{m-p}(M,\mathbb{R}),$$

不难看出 φ 是一个同构.

推论 5.3.4 若 M 是一个 m 维可定向的紧致连通微分流形, 则

$$H_{\mathrm{d}}^m(M,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}.$$

参考文献

[1] 陈省身，陈维桓. 微分几何讲义. 北京: 北京大学出版社, 1983.

[2] Singer I M, Thorpe J A. 拓扑学与几何学基础讲义. 干丹岩译. 上海: 上海科学技术出版社, 1985.

[3] Milnor J. 从微分观点看拓扑. 熊金城译. 上海: 上海科学技术出版社, 1983.

[4] Kervaire M. A manifold which does not admit any differentiable structure. Comm. Math., 1960, 34:257–270.

[5] Milnor J. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. Annals of Math., 1956, 64:399–405.

[6] Kervaire M, Milnor J. Groups of homotopy spheres:I. Annals of Math., 1963, 77(3):504–534.

[7] Bröcker T, Jänick K. Introduction to Differential Topology. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

[8] Milnor J. 莫尔斯理论. 江嘉禾译. 北京: 科学出版社, 1988.

[9] Arnold V I. Singularity Theory. Cambridge:Cambridge University Press, 1981.

[10] 李养成. 光滑映射的奇点理论. 北京: 科学出版社, 2002.

[11] Hirsch M W. Differential Topology. New York: Springer-Verlag, 1976.

[12] Whitney H. The selfintersections of a smooth n- manifold in 2n-space. Annals of Math., 1944, 45:220–246.

[13] 张筑生. 微分拓扑讲义. 北京: 北京大学出版社, 1996.

[14] 徐森林, 胡自胜, 薛春华. 微分拓扑. 北京: 清华大学出版社, 2008.

[15] Warner F W. 微分流形与李群基础. 谢孔彬, 谢云鹏译. 北京: 科学出版社, 2008.

[16] Montgomery D, Zippin L. Topological Transformation Groups. New York:Interscience, 1955.

[17] 严志达, 许以超. Lie 群及其 Lie 代数. 北京: 高等教育出版社, 1985.

[18] Berger M, Gostiaux B. 微分几何: 流形、曲线和曲面. 第 2 版修订本. 王耀东译. 北京: 高等教育出版社, 2009.

[19] Дубровин Б А, Новиков С П, Фоменко А Т. 现代几何学: 方法与应用: 流形上的几何与拓扑. 第 2 卷. 第 5 版. 潘养廉译. 北京: 高等教育出版社, 2007.

[20] 江泽涵. 拓扑学引论. 上海：上海科学技术出版社, 1978.

[21] 尤承业. 基础拓扑学讲义. 北京: 北京大学出版社, 1997.

[22] Massey W S. Algebraic Topology: An Introduction. New York: Springer-Verlag , 1978.

[23] 苏竞存. 流形的拓扑学. 武汉: 武汉大学出版社, 1992.

[24] Boothby W M. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. New York: Academic Press, 1975.

[25] 陈维桓. 微分流形初步. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2000.

[26] Munkres J R. Topology. 2nd ed. Englewood Cliff:Prentice Hall, 2000.

索 引